§9.7 微分形式*

在 §9.3 中, 我们介绍了函数的微分. 即给定一个定义在 $D \subset E = \mathbb{R}^n$ 上的可微函数 $z = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, x_n)$, 则 f 在一点 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 的微分是

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_n$$

也就是说, 函数 f 的微分 $\mathrm{d}f$, 就是 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 的线性组合, 其组合系数是函数对应的偏导数.

因此我们定义 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 任意的线性组合

$$\omega = A_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + A_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_n$$

为一次微分形式, 这里系数 $A_i,\ i = 1, \cdots, n$ 是变量 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的函数.

注意, 一次微分形式未必是一个函数的微分, 除非它的系数正好对应一个函数的偏导数. 因此一次微分形式的定义, 使我们摆脱了具体函数的束缚, 不再限制在具体函数的微分, 而是推广到微分的形式.

为了进一步说明微分形式的意义, 我们以三维空间的微分形式为例.

9.7.1 微分形式的空间

首先在 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ 之间定义一种乘法, 称为“外积”, 它满足下列外积运算的基本规则:

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = 0$$

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x,\ \ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y,\ \ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z,$$

当多个 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ 进行连乘时, 根据上述规则可以交换次序, 且连乘中若有两个相等, 就一定是零, 只有 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 是非平凡的.

把 $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$、$\{\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\}$ 以及 $\{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\}$ 分别看成生成元, 它们各自线性生成的元素分别称为“一次、二次、三次**微分形式**”或简称“**形式**”. 同时我们约定一般的函数为“0 次微分形式”, 概括起来即是: 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的区域

0 次微分形式: Ω 上可微函数(或称数量场) $z = \phi(x, y, z)$, 因此也记为

$$\omega_\phi^0 = \phi$$

1 次微分形式: $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ 的线性组合 $A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y + C\,\mathrm{d}z$, 其中 A, B, C 是 Ω 上的函数. 一次形式对应一个定义在 Ω 上的向量场 $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$, 因此一次形式也记成

$$\omega_{\boldsymbol{v}}^1 = A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y + C\,\mathrm{d}z.$$

2 次微分形式:　$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 的线性组合 $D\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+E\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+F\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中系数 D,E,F 是 Ω 上的函数. 一个二次微分形式也对应 Ω 上一个向量场 $\boldsymbol{v}=D\boldsymbol{i}+E\boldsymbol{j}+F\boldsymbol{k}$, 因此记为

$$\omega^2_{\boldsymbol{v}}=D\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+E\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+F\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

3 次微分形式:　三次微分形式定义为 $h\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$, 其中系数 $h=h(x,y,z)$ 是 Ω 上的函数, 因此记为

$$\omega^3_h=h\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

显然, 根据 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 之间的外积关系, 三维空间中不再有其他形式的微分形式了. 另一方面, 同次的微分形式具有线性空间中向量所具有的数乘和加法运算.

9.7.2　微分形式的外积

将关于 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 之间的外积运算推广到微分形式中去, 按照 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 之间的外积运算的基本规则, 并规定微分形式之间的外积满足结合律和对同次微分形式加法的分配律. 具体运算结果如下:

1°　对于两个一次形式

$$\omega^1_{\boldsymbol{v}_j}=A_j\,\mathrm{d}x+B_j\,\mathrm{d}y+C_j\,\mathrm{d}z,\quad j=1,2,$$

根据外积运算的基本规则, 它们的外积为

$$\begin{aligned}&\omega^1_{\boldsymbol{v}_1}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{v}_2}=(A_1\,\mathrm{d}x+B_1\,\mathrm{d}y+C_1\,\mathrm{d}z)\wedge(A_2\,\mathrm{d}x+B_2\,\mathrm{d}y+C_2\,\mathrm{d}z)\\&=(B_1C_2-B_2C_1)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(C_1A_2-C_2A_1)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(A_1B_2-A_2B_1)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}$$

因此是一个二次形式. 注意到这个二次形式对应的向量场正是两个一次形式对应的向量场 $\boldsymbol{v}_1=A_1\boldsymbol{i}+B_1\boldsymbol{j}+C_1\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{v}_2=A_2\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+C_2\boldsymbol{k}$ 之间叉乘的结果, 即

$$\omega^1_{\boldsymbol{v}_1}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{v}_2}=\omega^2_{\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2}$$

2°　一个一次形式 $\omega^1_{\boldsymbol{v}}=A\,\mathrm{d}x+B\,\mathrm{d}y+C\,\mathrm{d}z$ 与一个二次形式 $\omega^2_{\boldsymbol{u}}=P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 的外积, 按照外积运算的基本规则, 其结果是一个三次形式

$$\begin{aligned}&\omega^1_{\boldsymbol{v}}\wedge\omega^2_{\boldsymbol{u}}=(A\,\mathrm{d}x+B\,\mathrm{d}y+C\,\mathrm{d}z)\wedge(P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\&=(AP+BQ+CR)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

系数 $AP+BQ+CR$ 正是向量场 $\boldsymbol{v}=A_1\boldsymbol{i}+B_1\boldsymbol{j}+C_1\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{u}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的点乘

$$\omega^1_{\boldsymbol{v}}\wedge\omega^2_{\boldsymbol{u}}=\omega^3_{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}$$

3° 三个一次形式 $\omega^1_{\boldsymbol{v}_j} = A_j\,\mathrm{d}x + B_j\,\mathrm{d}y + C_j\,\mathrm{d}z,\ j = 1,2,3$ 的外积是一个三次形式, 根据 1° 和 2°, 不难算出

$$\omega^1_{\boldsymbol{v}_1} \wedge \omega^1_{\boldsymbol{v}_2} \wedge \omega^1_{\boldsymbol{v}_3} = \omega^3_{\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_3}$$

4° 0 次形式 $\omega^0_\phi = \phi(x,y,z)$ 与任何形式的外积等于 ϕ 乘以微分形式的系数. 例如 0 次形式与一次形式 $\omega^1_{\boldsymbol{v}} = A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y + C\,\mathrm{d}z$ 的外积仍为一次形式

$$\omega^0_\phi \wedge d\omega^1_{\boldsymbol{v}} = \phi A\,\mathrm{d}x + \phi B\,\mathrm{d}y + \phi C\,\mathrm{d}z = \omega^1_{\phi\boldsymbol{v}}$$

除了上述四种情况, 三维空间中微分形式的外积再也没有其他非平凡的情况了.

9.7.3 微分形式的外微分

我们知道, 作为零次形式的函数 ϕ, 它的微分是一个一次形式. 现在的问题是, 一次（或者更高次数的）微分形式可否微分? 另一方面, 一个给定的一次形式, 是否可以表示成一个零次微分形式的微分? 为此我们定义微分形式的一种微分, 称为**外微分**, 它是函数 (即 0 次形式) 微分的推广.

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的区域, 以下均假设所涉及的函数和微分形式的系数在 Ω 上的各阶偏导数都是连续的.

定义微分形式的 **外微分**是一个从低次的形式到高一次的形式的映射

$$\mathrm{d}:\quad p\ \text{次形式} \longrightarrow p+1\ \text{次形式}$$

对于三维空间上的微分形式, 外微分的具体过程如下

1° 对于零次形式 $\omega^0_\phi = \phi$, 它的外微分定义为

$$\mathrm{d}\omega^0_\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,\mathrm{d}z,$$

即是函数的微分, 结果是一个一次形式, 系数正是函数 ϕ 的梯度的三个分量

$$\mathrm{d}\omega^0_\phi = \omega^1_{\mathrm{grad}\,\phi} = \omega^1_{\nabla\phi}$$

2° 一次形式 $\omega^1_{\boldsymbol{v}} = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ 的外微分定义为

$$\mathrm{d}\omega^1_{\boldsymbol{v}} = \mathrm{d}(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z) = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}z$$

因为 $P,\ Q,\ R$ 都是函数 (也就是 0 次形式), 它们的微分已由 1° 所定义, 其结果是一个一次形式, 例如

$$\mathrm{d}P = \frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

等等, 代入得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{v}}^1 =& \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y \\
&+ \left(\frac{\partial R}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \\
=& \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

其结果是一个二次形式. 因此 $\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{v}}^1$ 对应的向量场正是 $\boldsymbol{v}$ 的旋度

$$\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{v}}^1 = \omega_{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}}^2 = \omega_{\nabla\times\boldsymbol{v}}^2.$$

3° 二次形式 $\omega_{\boldsymbol{v}}^2 = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 的外微分定义为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{v}}^2 =& \mathrm{d}(P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) \\
=& \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

把 $\mathrm{d}P$, $\mathrm{d}Q$, $\mathrm{d}R$ 的表达式代入, 得

$$\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{v}}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

它是三次形式

$$\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{v}}^2 = \omega_{\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}}^3 = \omega_{\nabla\cdot\boldsymbol{v}}^3.$$

显然, 在三维空间, 三次形式的外微分总是零 $\mathrm{d}\omega_h^3 = 0$.

对于外微分运算, 有如下重要的 Poincaré 引理.

引理 9.28 (Poincaré) 设 ω 是一个微分形式, 其系数具有二阶连续的偏微商, 则

$$\mathrm{d}^2\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$$

证明 我们不妨对三维空间的各次微分形式一一加以验证.

1° 当 $\omega = \omega_\phi^0 = \phi(x, y, z)$ 是一个 0 次形式时,

$$\mathrm{d}\omega_\phi^0 = \omega_{\mathrm{grad}\,\phi}^1 = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,\mathrm{d}z,$$

是一个一次形式, 继续对其做外微分得

$$\mathrm{d}^2\omega_\phi^0 = \mathrm{d}\omega_{\mathrm{grad}\,\phi}^1 = \omega_{\mathrm{rot\,grad}\,\phi}^2 = 0$$

2° 当 $\omega = \omega_{\boldsymbol{v}}^1 = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ 是一个一次形式时,

$$\mathrm{d}\omega_{\boldsymbol{v}}^1 = \omega_{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}}^2$$

是一个二次形式,于是

$$\mathrm{d}^2\omega^1_{\boldsymbol{v}} = \mathrm{d}\omega^2_{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}} = \omega^3_{\mathrm{div\,rot}\,\boldsymbol{v}} = 0.$$

3° 当 $\omega = \omega^2_{\boldsymbol{v}}$ 是一个二次形式时, 微分一次, 则 $\mathrm{d}\omega$ 是一个三次形式, 再微分一次, 自然有 $\mathrm{d}^2\omega = 0$. □

定义 9.29 对于给定的(一、二、三次)微分形式 ω, 如果存在一个低一次的形式 θ, 使得 ω 是 θ 的外微分, 即有 $\omega = \mathrm{d}\theta$, 那么称 ω 是一个恰当微分形式.

定理 9.30 [Poincaré 引理之逆定理] 如果 ω 满足 $\mathrm{d}\omega = 0$, 且它的定义域满足一定条件, 那么它是恰当的.

这里, 为了简单说明, 我们不再深究上述定理中对于微分形式定义域的要求.

例 9.7.1 设 $\omega = y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, 则 $\mathrm{d}\omega = -\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \neq 0$, 所以不是恰当的, 即不存在一个 0 次形式 θ 使得 $\omega = \mathrm{d}\theta$. 或者说 ω 不能表示成函数的全微分.

例 9.7.2 设 $\omega = yz\,\mathrm{d}x + zx\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$, 则 $\mathrm{d}\omega = 0$. 容易看出它是函数 (0 次形式) $\theta = xyz$ 的全微分: $\omega = \mathrm{d}\theta$.

对于恰当的微分形式 ω , 如何构造一个“原形式” θ, 使得 $\omega = \mathrm{d}\theta$(类比一元函数的原函数概念), 应该是一个积分的过程. 我们将在引进曲线积分和曲面积分之后讨论.

9.7.4 微分形式在高维空间的推广

微分形式在高维空间 $\mathbb{R}^n$ 的推广如下:

0 次形式就是 n 元可微函数的全体.

一次形式就是 $\mathrm{d}x_i,\ \ i = 1,\cdots,n$ 的线性组合

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_i$$

二次形式是 $\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j,\ \ 1\leqslant i<j\leqslant n$ 的线性组合

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j.$$

推而广之, p 次形式就是 $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p},\ \ 1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$ 的线性组合

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n} a_{i_1i_2\cdots i_p}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

p 次形式的全体 V^p 构成一个 $\binom{n}{p}$ 维的空间.

而 n 次形式就是

$$a(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1\wedge\,\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\,\mathrm{d}x_n.$$

这里, 外积的运算遵守下列原则

$$\mathrm{d}x_i\wedge\,\mathrm{d}x_j=-\,\mathrm{d}x_j\wedge\,\mathrm{d}x_i,\ 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

所有系数都是空间 E 中区域 Ω 上的有连续偏微商的函数. 因此, 一般地，一个 p 次形式 ω_p 和一个 q 次形式 ω_q 的外积是一个 $p+q$ 次形式

$$\omega_q\wedge\omega_q\in V^{p+q}$$

所定义的外微分 “ d” , 是一个保持线性和数乘的映射

$$\mathrm{d}:\quad V^p\longrightarrow V^{p+1},\quad p=0,1,\cdots,n-1.$$

习题 9.7

1. 计算

   (1) $(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)\wedge(z\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}x))$; (2) $(\,\mathrm{d}x+\,\mathrm{d}y+\,\mathrm{d}z)\wedge(x\,\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y-z\,\mathrm{d}y\wedge\,\mathrm{d}z)$.

2. 对下列微分形式 ω, 计算它们的微分, 即计算 $\mathrm{d}\omega$

   (1) $\omega=xy+yz+zx$;

   (2) $\omega=xy\,\mathrm{d}x$;

   (3) $\omega=xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y$;

   (4) $\omega=x^2y\,\mathrm{d}x-yz\mathrm{e}^2\,\mathrm{d}y+\sin xyz\,\mathrm{d}z$;

   (5) $\omega=xy^2\,\mathrm{d}y\wedge\,\mathrm{d}z-xz^2\,\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y$;

   (6) $\omega=xy\,\mathrm{d}y\wedge\,\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\wedge\,\mathrm{d}x+zx\,\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y$;

第 9 章综合习题

1. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非零常数. $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微. 求证: 存在 $\mathbb{R}$ 上一元可微函数 $F(s)$ 使得 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)$ 的充分必要条件是 $a_j\frac{\partial f}{\partial x_i}=a_i\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $i,j=1,2,\cdots,n$.

2. 设 $f(x,y,z)=F(u,v,w)$, 其中 $x^2=vw$, $y^2=wu$, $z^2=uv$. 求证:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=u\frac{\partial F}{\partial u}+v\frac{\partial F}{\partial v}+w\frac{\partial F}{\partial w}.$$