

17题之前是前三章内容, 后面都是第四章

期中复习·复分析常见判断题汇总

黄天一

2023年4月7日

这里我们给出不少与复分析期中前内容相关的判断题, 来帮助同学们复习一些细枝末节的概念与性质. 先判断对错, 再说明理由. 下面我们总设 Ω 是 \mathbb{C} 中的区域.

1. 若 f 在 $z_0 \in \mathbb{C}$ 处满足 Cauchy-Riemann 方程, 则 f 在 z_0 处全纯.
2. 存在 $B(0, 1) \setminus \{0\}$ 上的无界全纯函数 f , 使得 $\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = 0$.
3. 设 $f = u + iv \in H(\Omega)$, 且满足 $u = v^2$, 则 f 为常数.
4. 设 u 在 Ω 上调和, 则存在 $f \in H(\Omega)$, 使得 $u = \operatorname{Re} f$.
5. 若整函数 f 将实轴和虚轴上的点均映为实数, 则 $f'(0) = 0$.
6. $\operatorname{Log}(z)$ 作为多值函数, 成立等式 $\operatorname{Log}(z^2) = 2\operatorname{Log}(z)$.
7. 对任意的 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和 $w \in \mathbb{C}$, 成立 $z^{2w} = (z^w)^2$.
8. $\sin z$ 是复数域上的有界函数.
9. 函数 $f(z) = \operatorname{Log}\left(\frac{z^2 - 1}{z}\right)$ 在区域 $\mathbb{C} \setminus ([-1, 0] \cup [1, \infty))$ 上能选出单值的全纯分支.
10. 设 f 为 $\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$ 在 $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ 上的单值全纯分支, 并且 $f(i) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{8}i}$, 则 $f(-i) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{8}i}$.
11. 若 f 在 Ω 上全纯, 则沿 Ω 内任一可求长闭曲线的积分为零.
12. 若 f 在 Ω 上全纯, 则 f 在 Ω 上存在原函数.
13. 在单位圆周上可以用多项式一致逼近函数 $f(z) = \frac{1}{z}$.
14. 当 $\operatorname{Re} z_1 \leq 0, \operatorname{Re} z_2 \leq 0$ 时, $|e^{z_1} - e^{z_2}| \leq |z_1 - z_2|$.
15. \mathbb{C} 上的非负调和函数为常数.
16. 设 f 为非常值整函数, 则当 $z \rightarrow \infty$ 时, $|f(z)| \rightarrow \infty$.
17. 非常值整函数 f 的像在 \mathbb{C} 中稠密.

18. 设 f 在 $|z| < 2$ 内全纯, 且对任意 $n \geq 1$, 有

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)dz}{(n+1)z-1} = 0,$$

则 f 恒为零.

19. 单位圆盘 $B(0,1)$ 上的非零全纯函数在 $B(0,1)$ 中至多有有限个零点.

20. 设 f 在 Ω 上全纯, 且在 Ω 上恒成立 $f'(z) \neq 0$, 则 f 在 Ω 上单叶.

21. 方程 $2z^4 = \sin z$ 在 $|z| < 1$ 中只有一个根.

22. 方程 $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ 在圆环 $1 < |z| < 2$ 内的零点个数为 3.

23. 设 $f \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, 则 f 在 Ω 的边界上取到最大模.

24. 设 $|z_k| > 1, k = 1, \dots, n$. 则存在 $z_0 \in \partial B(0,1)$, 满足 $\prod_{k=1}^n |z_k - z_0| > 1$.

25. 存在 Ω 上的全纯函数 f , 使得在 Ω 上恒成立 $|f(z)| = |z|^2 + 1$.

26. 设 f 为整函数, 如果 f 在 $B(0,1)$ 内非零, 且 $f(z) = M, \forall |z| = 1$, 则 f 为常数.

27. 设 $f: B(0,1) \rightarrow B(0,1)$ 全纯, 且 $f(0) = 0$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} f(z^n)$ 在 $B(0,1)$ 中内闭一致收敛.