§1.1

Basics.

压缩映射 $(X,\rho)\to(X,\rho)$ $\exists\ 0<\alpha<1$.

$\rho(Tx,Ty)\le\alpha\,\rho(x,y)$.

Thm (Banach 不动点) (X,ρ) 完备, 压缩映射不动点存在且唯一.

Pf. ~~$\forall x_0, y_0\in X$.~~ 令 $x_1=Tx_0$. ~~$y_1=Ty_0$.~~

$\cdots$ ~~$Tx_n=Tx_{n-1}$, $Ty_n=Ty_{n-1}$. 这样 $d(x_n,y_n)\le\alpha^n d(x_0,y_0)$.~~

$\forall x_0\in X$. $x_1=Tx_0$ $\cdots$ $x_n=Tx_{n-1}$.

$\forall m>n$, $d(x_n,x_m)\le d(x_n,x_{n+1})+\cdots+d(x_{m-1},x_m)$

而 $d(x_n,x_{n+1})\le\alpha\, d(x_{n-1},x_n)\le\alpha^n d(x_0,x_1)$.

故 $d(x_n,x_m)\le d(x_0,x_1)\cdot\sum_{k=n}^{m-1}\alpha^k\le\dfrac{\alpha^k d(x_0,x_1)}{1-\alpha}$.

$\Rightarrow\{x_n\}$ 为基本列. $\exists\, x\in X$ $x_n\to x$

唯一性. x,y 均为不动点 $d(x,y)\le\alpha\, d(Tx,Ty)\Rightarrow x=y$.

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

§1.1 Ex.

1.1.1. 证(1) (X,ρ) 完备. M 闭 X. (M,ρ) 也完备;

(2) (X,ρ) 完备，若 $M\subset X$. (M,ρ) 完备. M 闭.

pf. (1) 取 M 中基本列 x_n. 则 $x_n\to x$, $x\in X$. 由闭性 $x\in M$. 得证

(2) 取 M 中基本列 x_n. 由完备性 $x_n\to x$, $x\in M$. 此即闭性.

1.1.2 $f\in C^2[a,b]$. $\hat{x}\in(a,b)$, $f(\hat{x})=0$, $f'(x)\neq 0$.

证: $\exists$ $\hat{x}$ 的邻域 $U(\hat{x})$, s.t. $\forall x_0\in U(\hat{x})$ 序列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ 收敛, 且 $x_n\to\hat{x}$.

pf. 由于 $f'(\hat{x})\neq 0$ $\exists$ $U(\hat{x})$, s.t. $f'(x)>0$, $\forall x\in U(\hat{x})$
(不妨设 $f'(\hat{x})>0$)

$$Tx\overset{def}{=}x-\frac{f(x)}{f'(x)}.\Rightarrow\frac{d}{dx}(Tx)=\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\triangleq g(x)$$

$\lim\limits_{x\to\hat{x}}g(x)=0$. 取 $\tilde{U}(\hat{x})\subset U(\hat{x})$. $|g(x)|<\frac{1}{2}$, $x\in\tilde{U}(\hat{x})$

则 T 为压缩映射.

1.1.3. (X,ρ) ，$T:X\to X$ 有 $\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$.

已知T有不动点. 证明唯一

pf.. 若 $x\neq y$ 均为不动点. $\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$. 矛盾.

1.1.4. T为 (X,ρ) 上压缩映射. 证T连续

pf. T为压缩映射. $\rho(Tx,Ty)\leq\alpha\,\rho(x,y)$. $\alpha<1$.

$\forall\varepsilon>0$. 取 $\delta=\varepsilon$. 对 $\forall x\in X$., $\forall y\in B_\delta(x)$

$\rho(Ty,Tx)\leq\alpha.\rho(x,y)\leq\alpha\varepsilon<\varepsilon$. 故 T在x处

连续. $\Rightarrow$ T为连续映射.

1.1.5 T为 (X,ρ) 上压缩映射，证 T^n 为压缩映射，反之不然.

pf. 显然. 反例：$f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}$. $f^2(x)=\frac{x}{2}$.

1.1.6 $M \overset{\text{有界闭}}{\subset} (\mathbb{R}^n,\rho)$. $T:M\to M$., $\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$

for $x\neq y\in M$. 证：T在M中 $\exists!$ 不动点.

pf. 令 $f(x)\overset{def}{=}\rho(Tx,x)$.

$$|f(x)-f(x_0)|=|\rho(x,Tx)-\rho(x_0,Tx_0)|\leq\rho(x,x_0)+\rho(Tx,Tx_0)\to 0 \quad \text{as } x\to x_0.$$

$\Rightarrow f(x)$ 在M上连续. 存在最小值，即若 $f(x_0)$ 取最小.

有 $f(Tx_0)<f(x_0)$ 矛盾.

1.1.7. 积分方程：$x(t)-\lambda\int_0^1 e^{t-s}x(s)\,ds = y(t)$

其中 $y\in C[0,1]$. $\lambda\in\mathbb{R}$, $|\lambda|<1$. 证 ∃!解 $x(t)\in C[0,1]$.

pf. 令 $\cancel{x^{(n+1)} = y(t)+\lambda\int_0^1 e^{t-s}x^{(n)}(s)\,ds}$

$$\cancel{\|x^{(n+1)}-g^{(n+1)}\| = \lambda\left\|\int_0^1 e^{t-s}\left(x^{(n)}(s)-g^{(n)}(s)\right)ds\right\|}$$

令 $z(t)=e^{t}x(t)$. $\xi(t)=e^{-t}y(t)$

$T: z(t)\to \xi(t)+\lambda\int_0^1 z(s)\,ds$ T为压缩映射

这与原方程等价

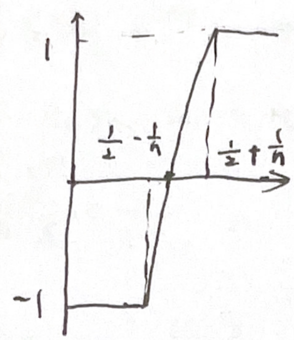
§1.2

Ex 1. 不完备，压缩映射无不动点

$X=[0,1]\setminus\{x_0\}$, $T(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x+1}$, $x_0=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$

Ex 2. $(C[a,b],\rho)$ 完备, $(C[a,b],\rho_1)$ 不完备.

$f_n(x)$ ↘



Def 等距同构：

(X,ρ), (X_1,ρ_1), $\varphi: X\to X_1$ 满足

(1) φ 满 (2) $\rho(x,y)=\rho_1(\varphi x,\varphi y)$ $\forall x,y\in X$.

Def 完备化.

(X,ρ) 的完备化是以 (X,ρ) 为子空间的最小度量空间

Thm 若 (X_1,ρ_1) 是以 (X,ρ) 为子空间的完备度量空间

$\rho_1|_{X\times X}=\rho$ 且 $X \overset{\text{dense}}{\subset} X_1$ 则 X_1 是 X 的完备化.

Thm 每个度量空间在等距同构下有且只有一个完备化空间.

§1.2

Ex. 1.2.1 S为一切实(复)数列 $x=(x_1,\cdots x_n,\cdots)$

定义 $\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$，证 S完备

pf. 取S中基本列 $x^{(n)}$. $\forall k>0$ 考虑: $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$.

取 $\frac{\varepsilon}{2^k}>0$. $\exists N_k>0$. $m,n>N_k$ 时 $\rho(x^{(m)},x^{(n)})<\frac{\varepsilon}{2^k}$.

$\Rightarrow \frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}|}{1+|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}|}<\frac{\varepsilon}{2^k} \Rightarrow |x_k^{(m)}-x_k^{(n)}|<\varepsilon$. $\{x_k^{(n)}\}$ 为基本列 $\xrightarrow{def} x_k$

$x\overset{def}{=}(x_1,\cdots x_n,\cdots)\in S$.

证明 $x^{(n)}\to x$.

$\forall\varepsilon>0$. ε足够小

$\exists N_0$ s.t. $\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{\varepsilon}{2}$. 对于 $k=1,2,\cdots n_0$. $\exists N_k>0$.

$m>N_k$ 时 $|x_k^{(m)}-x_k|<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ 对 $m>\max\{N_1,\cdots N_k\}$

$\rho(x^{(m)},x)<\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{2^k}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. $\Rightarrow x^{(n)}\to x$

1.2.2 (X,ρ)上,基本列是收敛列 $\Leftrightarrow$ 其中存在一串收敛子列

$(\Rightarrow)$ 平凡 $(\Leftarrow)$ $\{x_{n_k}\}\to x\in X$. $\exists N$ s.t. $n_k>N$ 时 $\rho(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists M$, s.t. $m,n>M$ 时 $\rho(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $n,n_k>\max\{M,N\}$

$\rho(x_n,x)\le\rho(x_n,x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x)<\varepsilon$. 故 $x_n\to x$.

1.2.3. F 是只有有限项不为 0 的实数列全体，定义 $\rho(x,y)=\sup\limits_{k\geq1}|x_k-y_k|$

求证 (F,ρ) 不完备，指出其完备化空间

反例：$X_k=(\frac{1}{2},\cdots\frac{1}{2^k},0,0,\cdots)$

$X_0=(\frac{1}{2},\cdots\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^{k+1}},\cdots)$

定 S 为所有以 0 为极限的数列集合

$\forall\,\tilde{x}\in S$. 取 $\tilde{x}_k$ 为 $\tilde{x}$ 的前 k 项截断后面为 0

$\tilde{x}_k\to\tilde{x}$ 故 $F\overset{dense}{\subset}S$.

再证 S 完备，几乎显然

1.2.4 证：$[0,1]$ 上多项式全体按 $\rho(P,Q)=\int_0^1|p(x)-q(x)|$ 是不完备的，并指出完备化空间

反例，$f_n(x)=\arctan(n\cdot(x-\frac{1}{2}))$ 则在 (L^1,ρ_1) 下. $f_n(x)\to \operatorname{sgn}(x-\frac{1}{2})\triangleq f$.

由于 $P[0,1]\overset{dense}{\subset}C[0,1]$. 对每个 f_n，由于 $f_n\in C[0,1]$. ，$\exists\ p_n\in P[0,1]$.

$\|P_n-f_n\|<\frac{1}{n}$ 而 $\|P_n-f\|_1\leq\|P_n-f_n\|_1+\|f_n-f\|_1$

$\leq\|P_n-f_n\|+\|f_n-f\|_1\to0$

$\Rightarrow P_n\to f$ 矛盾.（若 (P,ρ_1) 完备，$f\in P[0,1]\subset C[0,1]$ 矛盾）.

完备化 $L^1[0,1]$ 需证 $P\overset{dense}{\subset}L^1$（$\rho_1$ 意义下）. $\forall f_0\in L^1$

$\exists\ g_0\in(C[0,1],\rho_1)$ $\rho_1(g_0,f_0)<\frac{\varepsilon}{2}$，$\exists\ P_0\in(P[0,1],\rho_1)$.

$\rho_1(g_0,P_0)<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\rho_1(P_0,f_0)<\varepsilon$.

1.2.5. 完备 (X, ρ) 中点列 $\{x_n\}$. 若 $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ 基本列 $\{y_n\}$ s.t. $\rho(x_n, y_n) < \varepsilon$, 证 $\{x_n\}$ 收敛.

Pf. $\forall \varepsilon > 0$. $\exists \{y_n\}$, $\rho(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{3}$.

$\exists N>0$, $m,n>0$ 时 $\rho(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{3}$.

$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

1. 序列紧集 $A \subset X$. (X,d)

def (1) 任开覆盖有有限子覆盖. 则紧

~~且每列都有收敛子列，则称为列紧~~

(2) 若A中任一点列都有(X中)收敛子列，则称A列紧.

(3) 若A中任一点列都有在A中收敛的子列，则称A自列紧

若X自列紧，则称之为列紧空间

例：$\mathbb{R}^n$中列紧 $\Leftrightarrow$ 有界. (Bolzano-Weierstrass)

自列紧 $\Leftrightarrow$ 有界闭 $\Leftrightarrow$ 紧.

e.x. 一般度量空间中，有界不一定列紧.

(l^2, ρ_2), $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，但无收敛子列.

prop 列紧空间中任一集合都列紧，任一闭集都自列紧

prop 列紧空间一定完备

Def 如果 $\forall \varepsilon > 0$，都有A的一个有穷ε-网，则称A完全有界.

prop 完全有界 ⇒ 有界.

有界 ⇏ 完全有界

e.x. l^2中, $\{e_n\}$ 没有有穷ε-网

Thm (Hausdorff).

(i) 列紧 ⇒ 完全有界

(ii) 完备空间中, 列紧 ⇔ 完全有界

Thm (X, ρ), $M \subset X$.

M 紧 ⇔ M 自列紧.

Week3.

有界闭 ⇐ 紧 ⇔ 自列紧 ⇒ 列紧 ⇒ 完全有界 ⇒ 有界

$X=\mathbb{R}^n$时　　　　X完备时 . $X=\mathbb{R}^n$时

Thm 列紧空间可分

pf. $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}}$ 为可数 dense 子集.

Thm (Arzela-Ascoli)

$\mathcal{F} \subset C(M)$ 列紧 ⇔ $\mathcal{F}$ 作为函数族 $\begin{cases}\text{一致有界} \\ \text{等度连续}\end{cases}$

范数.

①正定性, ②齐次性, ③三角不等式

Thm

(投影定理)

Z 为实或复内积空间 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的非空完备凸集，则.

(a). 任给 $x \in X$ $\exists!\ Px \in Z$, s.t. $\|x - Px\| = \inf_{z\in Z} \|x - z\|$.

$\|\cdot\|$ 是内积导出范数

(b) 上述 Px 满足对 $\forall\ z \in Z$, $\begin{cases} \langle Px - x, z - Px\rangle \geq 0 & \mathbb{K}=\mathbb{R} \\ \mathrm{Re}\langle Px - x, z - Px\rangle \geq 0 & \mathbb{K}=\mathbb{C}. \end{cases}$

反过来. 若 y 满足 对 $\forall z \in Z$, $\begin{cases} \langle y - x, z - y\rangle \geq 0 & \mathbb{K}=\mathbb{R} \\ \mathrm{Re}\langle y - x, z - y\rangle \geq 0 & \mathbb{K}=\mathbb{C} \end{cases}$

则 $y = Px$.

(c) $P: X \to Z$ 满足 $\|Px_1 - Px_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$. 因而 P 为 lipschitz 映射

(d) 设 Z 是 X 的一个完备子空间, 则 对 $\forall z \in Z$, $\langle Px - x, z\rangle = 0$

反过来, 若 $y \in Z$ 满足 $\langle y - x, z\rangle = 0$, $\forall z \in Z$. 则 $y = Px$.

(e) $P: X \to Z$ 为线性的充要条件是 Z 为 X 的子空间, 此时若 $Z \neq \{0\}$, $\|P\|_{\mathcal{L}(X;Z)} = 1$.

def. $\|\cdot\|: A \in \mathcal{L}(X; Z) \to \|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

§1.3 Basics

Claim: 有穷维欧氏空间，有界无穷集必含有一收敛子列.

Def: (X,d) $A\subset X$

(1) $\forall$ 开覆盖有有限子覆盖.

Thm (Hausdorff) $M\subset(X,\rho)$ 度量空间

(1) M 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界

(2) 若 (X,ρ) 完备 M 列紧 $\Leftrightarrow$ 完全有界.

Pf. ($\Rightarrow$) 反证，取 x_1，再在 $M\setminus B_{\varepsilon_0}(x_1)$ 中取 $x_2\cdots$

$\{x_n\}$ 无收敛子列. 矛盾.

($\Leftarrow$) (X,ρ) 完备，完全有界

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset M$，对 1 网 $\exists y_1$，$\{x_n^{(1)}\}$ 为 $\{x_n\}$ 子列

$\{x_n^{(1)}\}\subset B(y_1,1)$.

$\cdots$

对 $\frac{1}{k}$ 网，$\exists y_k\in M$，$\{x_n^{(k-1)}\}$ 子列 $\{x_n^{(k)}\}\subset B(y_k,1/k)$.

而 $\{x_k^{(k)}\}$ 为基本列: $\rho(x_{n+p}^{(n+p)},x_n^{(n)})\le\rho(x_{n+p}^{(n+p)},y_n)+\rho(x_n^{(n)},y_n)$

$\le\frac{2}{n}<\varepsilon$.

Claim

$$\begin{tikzcd}
\text{有界闭} & \text{紧} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{自列紧} \arrow[r, Rightarrow] & \text{列紧} \arrow[r, Rightarrow] & \text{完全有界} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[l, bend left, "X\text{完备}"] & \text{有界} \arrow[l, bend left, "\mathbb{R}^n"]
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}^n$

Claim：$(C(M), d)$ 完备. d 合理性通过 $\forall u \in C(M)$ 记 $u(M)$ 紧完成.

Pf. 取 $C(M)$ 中基本列 $\{f_n\}$. 定义 $f(x) \triangleq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

则 $f_n \to f$. f 连续易证.

§1.3

Ex. 1.3.1 (X, ρ) 完备；$A \subset X$ 列紧 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A$ 的列紧 ε 网

Pf. ($\Rightarrow$) 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界 $\Rightarrow$ 有有穷 ε 网. 平凡

($\Leftarrow$) 设 B 为 A 的列紧 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网，则 $\exists B$ 的有穷 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网 C

$\forall x \in A$, $\exists y \in B$. $\rho(y, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\exists z \in C$, $\rho(z, y) < \frac{\varepsilon}{2}$

C 也为 A 的有穷 ε 网. 得证.

1.3.2. 在度量空间中求证. 紧集上连续函数有界并可取到上下确界

Pf. (X, ρ). $M \overset{紧}{\subset} X$. 先证有上确界. 假设不然.

$\exists \{x_n\}$, $f(x_n) \to \infty$. 而 $x_{n_k} \to x_0 \in M$. $f(x_{n_k}) \to f(x_0) < \infty$.

矛盾；

再证上确界可取到. 假设不然. $\exists x_n. \rho(f(x_n), \tilde{M}) < \frac{1}{n}$.

首先有 $f(x_n) \to \tilde{M}$. 又有 $x_{n_k} \to x_0 \in M \Rightarrow f(x_0) = \tilde{M}$ 矛盾.

1.3.3. 在度量空间中证：完全有界集合有界，并考虑 ℓ^2 子集 $\{e_n\}$ 说明反之不然.

Pf. (X,ρ). $A\subset X$ 为完全有界集. 有有穷1网 则 $\sup\limits_{x,y\in A}\rho(x,y)\le r+2$

r 为有穷1网的直径. 反之 $\{e_n\}$ 均位于 $B_1(0)$ 中, 有界

而 $\rho(e_i,e_j)=\sqrt{2}$. 不列紧；再由 ℓ^2 完备 列紧 $\Leftrightarrow$ 完全有界.

故 $\{e_n\}$ 不完全有界.

注 ℓ^p $1\le p\le\infty$ 完备；ℓ^p $1\le p<\infty$ 可分 $p=\infty$ 不可分

L^p $1\le p\le\infty$ 完备

1.3.4. (X,ρ). $F_1, F_2 \overset{紧}{\subset} X$ 证：$\exists\, x_i\in F_i\ (i=1,2)$ s.t. $\rho(F_1,F_2)=\rho(x_1,x_2)$

Pf. 反证. 由下确界定义 $\exists\, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\in F_1,F_2$.

$\rho(x_1^{(n)},x_2^{(n)}) < \frac{1}{n}+\rho(F_1,F_2)$. $x_1^{(n)}$ 有 $x_1^{(n_k)}\to\tilde{x}_1$

$x_2^{(n_k)}$ 有 $x_2^{(n_{k_p})}\to\tilde{x}_2$. $\Rightarrow \rho(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)=\rho(F_1,F_2)$.

1.3.5 M 是 $C[a,b]$ 中有界集，证 集合 $\{F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \mid f\in M\}$ 为列紧集

Tip. 证列紧 $\begin{cases}\text{完备+完全有界}\\ \text{A-A Thm.}\end{cases}$

Pf. $\forall f\in M$. $\exists N$. $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|<N$. $\Rightarrow \sup\limits_{x\in[a,b]}|F(x)|\le(b-a)N$. 一致有界

$\forall\varepsilon>0$. 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{N}$. 等度连续. A-A.

1.3.6. $E=\{\sin(nt)\}_{n=1}^{\infty}$ 证：E 在 $C[0,\pi]$ 中不列紧.

证明非等度连续.

1.3.7. S空间，子集A列紧 $\Leftrightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists C_n>0$ s.t. $\forall x=(x_1,\dots x_n\dots)\in A$ 有$|x_n|\le C_n$.

pf. ($\Rightarrow$) 较为平凡，反证

X，无法证明 $x\in A$

($\Leftarrow$) $\forall x^{(n)}$. 取 $x^{(1,n)}$ 为 $x^{(n)}$ 子列. $x_1^{(1,n)}\to\tilde{x}_1$

再取 $x^{(2,n)}$ 为 $x^{(1,n)}$ 子列 … 取对角线定义 $x\triangleq(\tilde{x}_1,\dots\tilde{x}_n\dots)$

则 $x^{(n,n)}\to x$，由S完备性，$x\in S$. 列紧得证.

另证：由于S完备，A列紧 $\Leftrightarrow$ $\exists A$的列紧ε网

$h_n=(x_1,\dots x_n,0,0,\dots)$. $\rho(x,h_n)<\varepsilon$. H为A的ε网且在X中列紧.

1.3.8 (X,ρ). $M\subset X$为列紧集. $f: X\to M$ 满足 $\rho(f(x_1),f(x_2))<\rho(x_1,x_2)$. 证$f$在$X$中$\exists!$不动点.

pf. 首先，f连续. 由列紧 $d=\inf\{\rho(x,f(x))\mid x\in\overline{M}\}$ 可取到. 即$\exists x_0$，$\rho(x_0,f(x_0))=d$. 再证$d=0$ 显然（套一次f即证）. 唯一性亦显然.

§1.4.
Basics.

Def.（线性包）Λ为指标集：$\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$为$X$中向量族. 一切$\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$有穷线性组合为线性包.
记为 $\mathrm{span}\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$.

ex. $L^p(\Omega,\mu)$. $1\le p<\infty$.

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

齐性，正定性显然，三角不等式为Minkowski不等式

$$\left(\int_\Omega |u(x)+v(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_\Omega |u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |v(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Thm 有穷维线性空间范数等价.

Col 1. 有穷维赋范空间完备

Col 2 赋范空间有穷维子空间必是闭子空间.

Claim. (1) B^*空间单位球面列紧;
(2) 若一个B^*空间单位球面列紧，则必然是有穷维的.

Pf. (1) B^*中单位球面与$\mathbb{R}^n$单位球面同构
$\|\cdot\|_B$与$\|\ \|_{\mathbb{R}^n}$等价.

(2) $S_1 \triangleq \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$. X为B^*空间.

倘若给定S_1上有穷个线性无关向量$\{x_1, \cdots x_n\}$

它们的线性包 M_n 还不满X. 则 $\exists X_{n+1} \in S_1$ s.t.

$\|X_{n+1} - X_i\| \geq 1 \quad (i=1, \cdots n)$.

这是因为 $\forall y \in M_n$. $\exists x \in M_n$ 为 y 的最佳逼近.

即 $\|y - x\| = d \triangleq \rho(y, M_n)$.

令 $x_{n+1} = \dfrac{y-x}{d}$, 则 $x_{n+1} \in S_1$

若X无穷维.可一直做下去, $\{x_n\}$不列紧, 矛盾.

Col. B^*有穷维 $\Leftrightarrow$ 任意有界集列紧.

Thm (Riesz引理)

X_0为B^*空间X的一个真闭子空间, 对$\forall\, 0<\varepsilon<1$

$\exists y \in X$, s.t. $\|y\| = 1$ 且 $\|y - x\| \geq 1 - \varepsilon$, $\forall x \in X_0$

Thm (最佳逼近) X为B^*空间. $\forall x \in X$和向量组

$\{e_1, \cdots e_n\}$ 存在关于x的最佳逼近系数.

§1.6
Basics.

Bessel 不等式（只需 X 为内积空间）

（A为正交规范集）$\sum_{\alpha\in A}|\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \le \|x\|^2$

$$\Big\downarrow \text{Hilbert}$$

$\sum_{\alpha\in A}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha \in X$ 且 $\|x-\sum_{\alpha\in A}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha\|^2 = \|x\|^2-\sum_{\alpha\in A}|\langle x, e_\alpha\rangle|^2$

$$\Big\downarrow S \triangleq \{e_\alpha \mid \alpha\in A\}.$$

S封闭 $\Longleftrightarrow$ S完备 $\Longleftrightarrow$ parseval 等式

$\forall x, x=\sum_{\alpha\in A}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$ 　　 $S^\perp=\{\theta\}$. 　　 $\sum_{\alpha\in A}|\langle x, e_\alpha\rangle|^2 = \|x\|^2$

Thm. X, Hilbert空间可分 $\Leftrightarrow$ 有至多可数正交规范基 S.

若 $\text{card}(S)=N<\infty$. 则 X 同构于 K^N, 若 $N=\infty$. X同构于 l^2.

- 最佳逼近

B^*空间：有穷维子空间 M，$\forall x$，存在最佳逼近

Hilbert空间：闭凸子集 N，$\forall x$，存在唯一最佳逼近.

特例： Hilbert空间上的闭线性子空间 ...