复分析第六次习题课

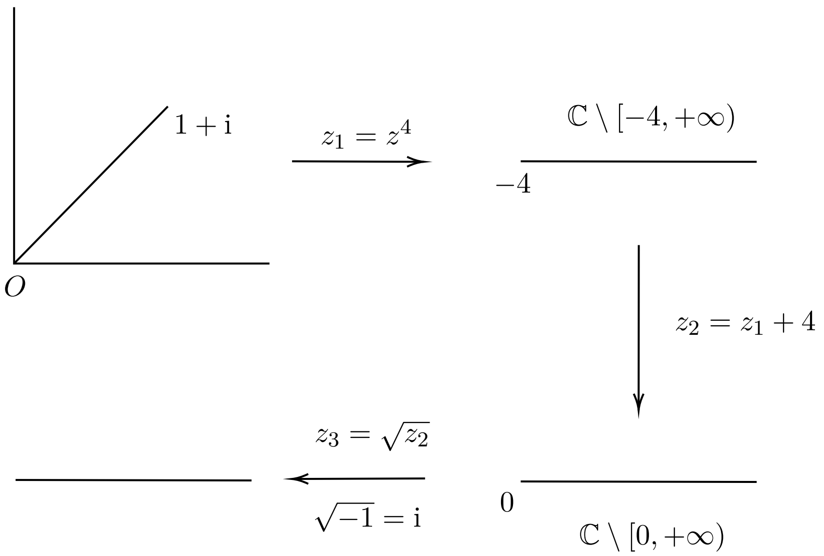
黄天一

2023 年 5 月 28 日

1　作业讲解

2.5.15. 求一个单叶全纯映射, 把除去线段 $[0, 1+\mathrm{i}]$ 的第一象限映为上半平面.

解答. 下图给出了待求的一个单叶全纯映射.



复合可得 $w = \sqrt{z^4 + 4}$. □

2.5.16. 求一个单叶全纯映射, 把半条形域

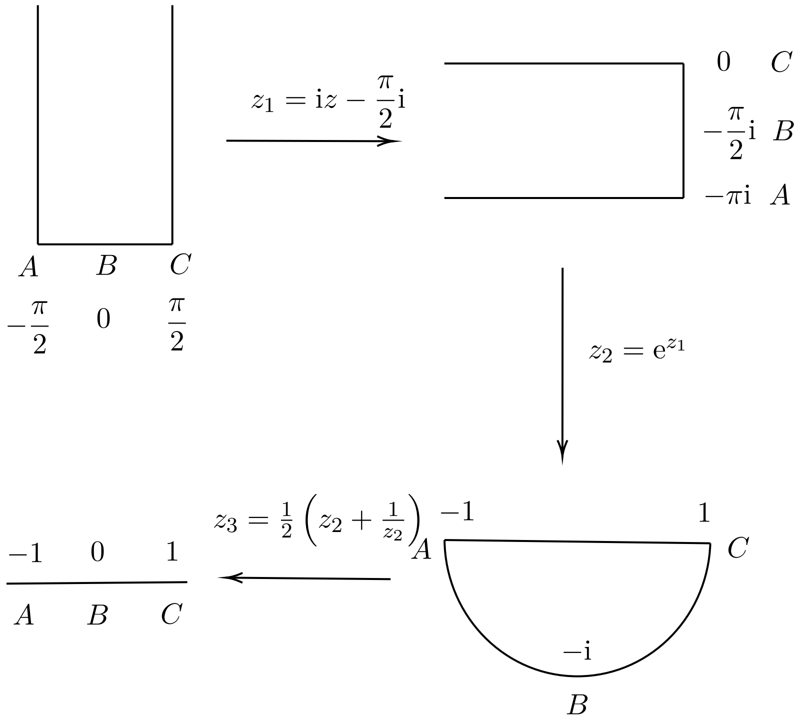
$$\left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\}$$

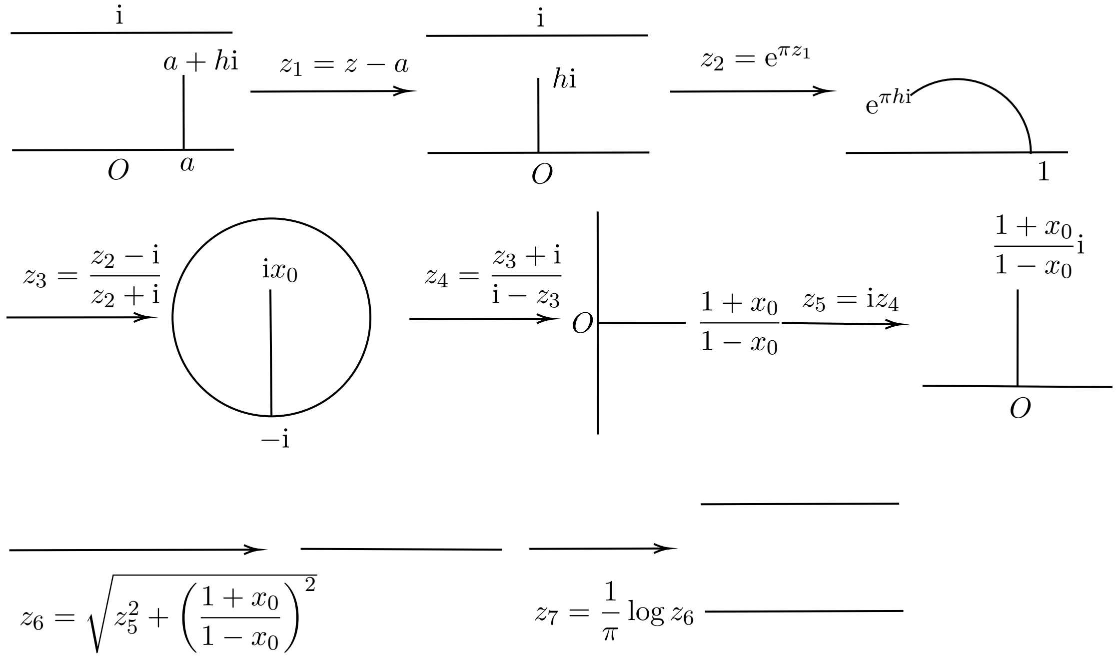
映为上半平面, 并且将 $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0$ 分别映为 $1, -1, 0$.

解答. 回忆 2.4 节作业中的儒可夫斯基函数 $\varphi(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, 它将下半圆盘单叶地映为上半平面, 将上半圆盘单叶地映为下半平面. 借助该函数, 我们可以如下构造待求的单叶全纯函数:
复合可得待求的一个单叶全纯映射为

$$w = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z - \frac{\pi}{2}\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i} - \mathrm{i}z}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \sin z.$$

□


A B C
$-\frac{\pi}{2}$ 0 $\frac{\pi}{2}$
$z_1 = \mathrm{i}z - \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$
0 C
$-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$ B
$-\pi\mathrm{i}$ A
$z_2 = \mathrm{e}^{z_1}$
$z_3 = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)$
-1 1
A C
$-\mathrm{i}$
B
-1 0 1
A B C


i
$a + h\mathrm{i}$
O a
$z_1 = z - a$
i
$h\mathrm{i}$
O
$z_2 = \mathrm{e}^{\pi z_1}$
$\mathrm{e}^{\pi h \mathrm{i}}$
1
$z_3 = \frac{z_2 - \mathrm{i}}{z_2 + \mathrm{i}}$
$\mathrm{i}x_0$
$-\mathrm{i}$
$z_4 = \frac{z_3 + \mathrm{i}}{\mathrm{i} - z_3}$
O
$\frac{1 + x_0}{1 - x_0}$
$z_5 = \mathrm{i}z_4$
$\frac{1 + x_0}{1 - x_0}\mathrm{i}$
O
$z_6 = \sqrt{z_5^2 + \left(\frac{1 + x_0}{1 - x_0}\right)^2}$
$z_7 = \frac{1}{\pi}\log z_6$

2.5.17. 求一个单叶全纯映射, 把除去线段 $[a, a+h\mathrm{i}]$ 的条形域 $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ 映为条形域 $\{w : 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$ 且 $0 < h < 1$.

解答. 我们可以按上图所示构造单叶全纯映射. 其中

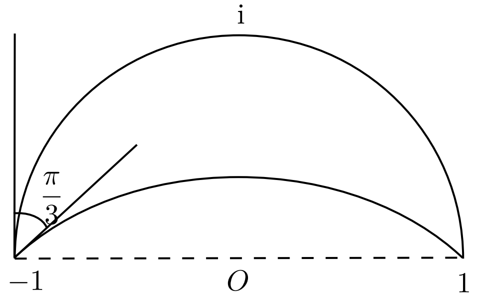
$$\mathrm{i}x_0 = \frac{\mathrm{e}^{\pi h \mathrm{i}} - \mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\pi h \mathrm{i}} + \mathrm{i}}.$$

复合可得

$$w = \frac{1}{\pi} \log \sqrt{\left(\frac{1+x_0}{1-x_0}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{e}^{\pi(z-a)} - 1}{\mathrm{e}^{\pi(z-a)} + 1}\right)^2}.$$

□

2.5.18. 求一个单叶全纯映射, 把如图所示的月牙形域映为 $B(0,1)$.



解答. 处理这种由两个圆弧围成的区域, 常用的方法是先分别将两个交点映为 0 和 ∞. 所以第一步变换为 $z_1 = \lambda \dfrac{z+1}{1-z}$, 根据单叶全纯映射的保角性, 我们希望能选取合适的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 将 i 映为辐角为 $\frac{\pi}{3}$ 的复数, 则该分式线性变换将月牙域映为区域 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$. 计算可得 $z = \mathrm{i}$ 时 $z_1 = \mathrm{i}\lambda$, 所以取 $\lambda = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

然后再作变换 $z_2 = z_1^3$, 则将扇形域 $\{0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$ 单叶地映成了上半平面. 最后作变换 $z_3 = \dfrac{z_2 - \mathrm{i}}{z_2 + \mathrm{i}}$, 则将上半平面单叶地映成了 $B(0,1)$. 综上所述, 待求的一个单叶全纯映射为

$$f(z) = \frac{-\mathrm{i}\frac{(z+1)^3}{(z-1)^3} - \mathrm{i}}{\mathrm{i} - \mathrm{i}\frac{(z+1)^3}{(z-1)^3}} = \frac{1+3z^2}{z^3+3z}.$$

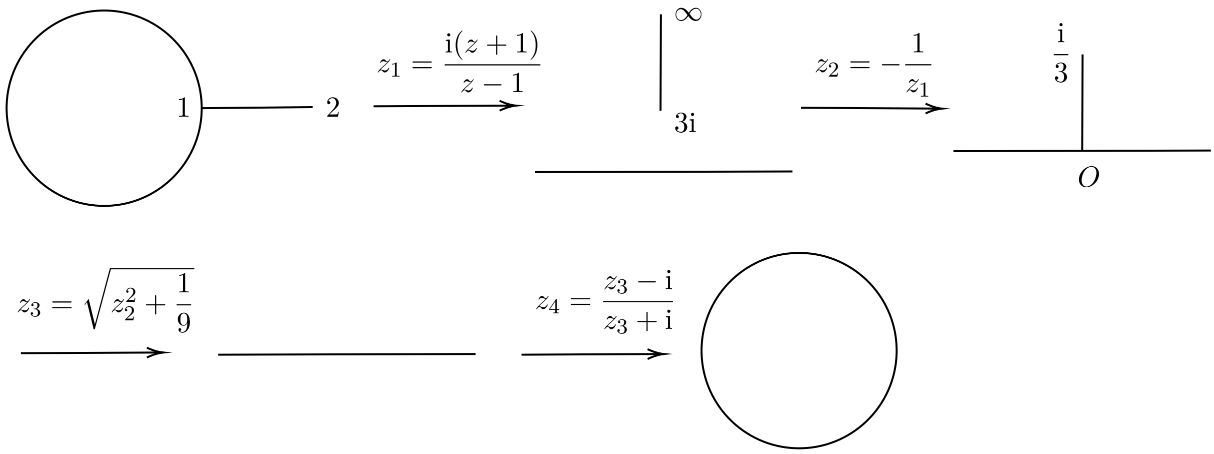
□

2.5.19. 求一个单叶全纯映射, 把除去线段 $[1,2]$ 的单位圆盘外部映为单位圆盘.

解答. 下图给出了一个符合要求的单叶全纯映射. 复合可得

$$w = \frac{\sqrt{9(z-1)^2 - (z+1)^2} - \mathrm{i}}{\sqrt{9(z-1)^2 - (z+1)^2} + \mathrm{i}}.$$

□



4.5.10. 设 $f \in H(B(0,R))$, $f(B(0,R)) \subset B(0,M)$, $f(0)=0$. 证明:
(1) $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{R}|z|$, $|f'(0)| \leqslant \dfrac{M}{R}$, $\forall z \in B(0,R)$.
(2) 等号成立当且仅当 $f(z) = \dfrac{M}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$.

证明. 考虑函数 $g: B(0,1) \to B(0,1)$, 定义为 $g(w) = \frac{1}{M} f(Rw)$, 从而 $g(0)=0$. 由 Schwarz 引理可得 $|g(w)| \leqslant |w|$, $|g'(0)| \leqslant 1$. 因此

$$|f(z)| = \left| M g\left(\frac{z}{R}\right)\right| \leqslant \frac{M}{R}|z|.$$

$$|f'(0)| = \left|\frac{M}{R} g'(0)\right| \leqslant \frac{M}{R}.$$

由 Schwarz 引理的取等条件可得, 等号成立当且仅当 $g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z (\theta \in \mathbb{R})$, 所以 $f(z) = \frac{M}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$. □

4.5.12. (Carathéodory 不等式) 设 $f \in H(B(0,R)) \cap C(\overline{B(0,R)})$, $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $A(r) = \max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z) (0 \leqslant r \leqslant R)$, 证明:

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|, \forall r \in [0,R).$$

证明. 先证明教材习题 4.5.11: 设 $f \in H(B(0,1))$, $f(0)=0$, 并且存在 $A>0$, 使得 $\operatorname{Re} f(z) \leqslant A$, $\forall z \in B(0,1)$, 则 $|f(z)| \leqslant \dfrac{2A|z|}{1-|z|}$, $\forall z \in B(0,1)$.

先找到一个从 $\{w \in : \operatorname{Re} w < A\}$ 到单位圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 的一个分式线性变换, 并且为了保证应用 Schwarz 引理, 该变换应将 0 映成 0. 符合要求的一个分式线性变换为 $z = \dfrac{w}{w-2A}$. 考虑 $B(0,1)$ 上的全纯函数 $g(z) = \dfrac{f(z)}{f(z)-2A}$, 则 $g(0)=0$ 且 $g(z) \leqslant 1, \forall z \in B(0,1)$. 由 Schwarz 引理可得

$$|g(z)| \leqslant |z| \Rightarrow |f(z)| = \left|\frac{2Ag(z)}{g(z)-1}\right| \leqslant \frac{2A|z|}{1-|z|}.$$

现在回到原题的证明. 考虑函数 $g(z) = f(Rz) - f(0)$, 定义 $\tilde{A}(r) = \max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} g(z)$, 首先证明: $\max\limits_{|z|\leqslant 1} \operatorname{Re} g(z) = \tilde{A}(1)$. 考虑函数 $h(z) = \mathrm{e}^{g(z)}$, 则 $h \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$. 由最大模原理可得

$$\max_{|z|\leqslant 1} |h(z)| = \max_{|z|=1} |h(z)| \Rightarrow \max_{|z|\leqslant 1} \mathrm{e}^{\operatorname{Re} g(z)} = \max_{|z|=1} \mathrm{e}^{\operatorname{Re} g(z)} \Rightarrow \max_{|z|\leqslant 1} \operatorname{Re} g(z) = \tilde{A}(1).$$

由习题 4.5.11 的结论可得

$$|g(z)| \leqslant \frac{2\tilde{A}(1)|z|}{1-|z|},\ \forall z \in B(0,1).$$

由定义可得 $\tilde{A}(1) \leqslant A(R) + |f(0)|$, 所以

$$|f(z)| \leqslant |f(0)| + \left|g\left(\frac{z}{R}\right)\right| \leqslant |f(0)| + \frac{2(A(R)+|f(0)|)|z|}{R-|z|} = \frac{2|z|}{R-|z|}A(R) + \frac{R+|z|}{R-|z|}|f(0)|.$$

由此即可得

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r}A(R) + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|.$$

□

4.5.13. 设 $f \in H(B(0,1))$, $f(0)=1$, 并且 $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0$, $\forall z \in B(0,1)$. 利用 Schwarz 引理证明:
(1) $\dfrac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant \operatorname{Re} f(z) \leqslant |f(z)| \leqslant \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$, $\forall z \in B(0,1)$.
(2) 上式最后一个等号在 z 异于零时成立, 当且仅当

$$f(z) = \frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z}(\theta \in \mathbb{R}).$$

证明. 为了应用 Schwarz 引理, 我们需要找到一个分式线性变换, 把右半平面映成单位圆, 并且将 1 映成 0. 不难求得复合要求的一个分式线性变换为 $w \mapsto \dfrac{1-w}{1+w}$. 考虑函数

$$g(z) = \frac{f(z)-1}{1+f(z)},$$

则 $|g(z)| \leqslant 1, \forall z \in B(0,1)$ 且 $g(0)=0$, 由 Schwarz 引理可得 $|g(z)| \leqslant |z|$. 所以

$$|f(z)| = \left|\frac{1+g(z)}{1-g(z)}\right| \leqslant \frac{1+|g(z)|}{1-|g(z)|} \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

由 Schwarz 引理可得等号成立当且仅当 $g(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$, 此时 $f(z) = \dfrac{1+g(z)}{1-g(z)} = \dfrac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z}$.

然后我们来证明左边的不等式, 这里给出两个证法.
(1) 由 $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0$ 及糖水不等式可得

$$|z|^2 \geqslant |g(z)|^2 = \frac{(\operatorname{Re} f(z)-1)^2 + \operatorname{Im}(f(z))^2}{(\operatorname{Re} f(z)+1)^2 + \operatorname{Im}(f(z))^2} \geqslant \frac{(\operatorname{Re} f(z)-1)^2}{(\operatorname{Re} f(z)+1)^2}.$$

由此可得

$$\frac{1-\operatorname{Re} f(z)}{\operatorname{Re} f(z)+1} \leqslant |z| \Rightarrow \operatorname{Re} f(z) \geqslant \frac{1-|z|}{1+|z|}.$$

(2) 直接计算可得

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+g(z)}{1-g(z)} + \frac{1+\overline{g(z)}}{1-\overline{g(z)}}\right) = \frac{1-|g(z)|^2}{1-2\operatorname{Re} g(z) + |g(z)|^2} \geqslant \frac{1-|z|^2}{1+2|z|+|z|^2} = \frac{1-|z|}{1+|z|}.$$

□

4.5.14. 设 $f \in H(B(0,1))$, 证明: 存在 $z_0 \in \partial B(0,1)$ 和收敛于 z_0 的点列 $z_n \in B(0,1)$, 使得 $f(z_n)$ 收敛.

证明. 反证, 假设结论不成立. 我们先证明: 对任意 $z_0 \in \partial B(0,1)$, 以及任一收敛于 z_0 的点列 $z_n \in B(0,1)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$. 事实上, 如果该断言不成立, 则存在 $z_0 \in \partial B(0,1)$, 以及收敛于 z_0 的点列 $z_n \in B(0,1)$, 使得 $f(z_n)$ 为有界序列. 从而 $f(z_n)$ 存在收敛子列 $f(z_{n_k})$, 而 $z_{n_k} \in B(0,1)$ 收敛于 z_0, 这与假设矛盾.

现在分两种情况讨论. 如果 f 存在无穷多个零点, 设 $z_n \in B(0,1)$ 为 f 的一个零点列, 则 z_n 存在聚点 z_0. 若 $z_0 \in B(0,1)$, 由唯一性定理可得 f 恒为零, 此时原结论显然成立. 如果 $z_0 \in \partial B(0,1)$, 则 z_n 存在子列 z_{n_k} 收敛于 z_0 并且 $f(z_{n_k}) = 0$, 原结论成立.

如果 f 仅有有限个互异零点 $z_1, \cdots, z_k$, 重数分别为 $n_1, \cdots, n_k$, 考虑函数

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n_1}\cdots(z-z_k)^{n_k}}.$$

则 $g \in H(B(0,1))$ 且不存在零点. 由断言可得对任意 $z_0 \in \partial B(0,1)$, 有 $\lim\limits_{B(0,1)\ni z\to z_0} f(z) = \infty$, 因此 $\lim\limits_{B(0,1)\ni z\to z_0} \frac{1}{g(z)} = 0$. 由此可得 $B(0,1)$ 上的全纯函数 $\frac{1}{g(z)}$ 可以连续地延拓到 $\overline{B(0,1)}$ 上, 并且在 $\partial B(0,1)$ 上取值恒为零. 由最大模原理可得 $\frac{1}{g(z)}$ 恒为零, 但这显然矛盾. □

4.5.15. 求出所有满足 $|f(z)| = 1, \forall |z| = 1$ 的整函数 f.

证明. 设 f 在 $B(0,1)$ 内的零点为 $z_1, \cdots, z_n$, 重数分别为 $k_1, \cdots, k_n$, 考虑函数

$$g(z) = f(z)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1-\bar{z}_j z}{z-z_j}\right)^{k_j}.$$

则 $g \in H(\overline{B(0,1)})$, 在 $B(0,1)$ 内无零点, 并且 $|g(z)| = 1, \forall |z| = 1$. 由最大模原理可得 $|g(z)| \leqslant 1, \forall |z| \leqslant 1$. 另一方面, 对 $\frac{1}{g}$ 再次应用最大模原理可得 $\frac{1}{|g(z)|} \leqslant 1$, $\forall |z| \leqslant 1$. 因此 $|g(z)| = 1$, $\forall |z| \leqslant 1$, 故 g 恒为常数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 从而

$$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}\right)^{n_j}.$$

另一方面, 由于 f 是整函数, 所以必须有 $z_j = 0$. 因此所有可能的 f 为 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z^n (\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$. □

4.5.16. 设 $P_n(z)$ 为 n 次多项式, $P_n^*(z) = z^n\overline{P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$. 证明: 若 $P_n(z)$ 的所有零点都在 $B(\infty,1)$ 内, 则 $P_n(z) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}P_n^*(z) (\theta \in \mathbb{R})$ 的零点都在 $\partial B(0,1)$ 上.

证明. 我们先证明: $f(z) = P_n(z) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}P_n^*(z)$ 的零点都在 $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant 1\}$ 内. 设 $P_n(z) = \lambda(z - z_1)\cdots(z-z_n)$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z_1, \cdots, z_n \in B(\infty,1)$, 则由定义可得

$$P_n^*(z) = \bar{\lambda}(1-\bar{z}_1 z)\cdots(1-\bar{z}_n z).$$

所以对任意 $z \in B(0,1)$, 有

$$\frac{P_n^*(z)}{P_n(z)} = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\frac{z_1\cdots z_n}{\bar{z}_1\cdots\bar{z}_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\frac{1}{\bar{z}_k}}{1-\frac{z}{z_k}} \Rightarrow \left|\frac{P_n^*(z)}{P_n(z)}\right| = \prod_{k=1}^{n}\left|\frac{z-\frac{1}{\bar{z}_k}}{1-\overline{(\frac{1}{\bar{z}_k})}z}\right| < 1.$$

此时必然有 $f(z) \neq 0$, 否则 $\frac{P_n^*(z)}{P_n(z)} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 模长为 1, 矛盾.

另一方面, 由定义可得

$$f^*(z) = P_n^*(z) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} P_n^{**}(z) = P_n^*(z) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} P_n(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f(z).$$

由此首先可得 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的零点, 并且若 z_0 是 $f(z)$ 的零点, 则 $\frac{1}{\bar{z}_0}$ 是 $f^*(z)$ 的零点, 从而是 $f(z)$ 的零点. 如果 $|z_0| > 1$, 则 $|\frac{1}{\bar{z}_0}| < 1$, 这与前面的讨论矛盾. 所以 $f(z)$ 的零点都在 $\partial B(0,1)$ 上. $\square$

4.5.17. 设 $f \in H(B(0,1))$, $f(B(0,1)) \subset B(0,1)$. 证明: 若 $z_1, \cdots, z_n$ 是 f 在 $B(0,1)$ 中所有彼此不同的零点, 其阶数分别为 $k_1, \cdots, k_n$, 则

$$|f(z)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{z_j - z}{1 - \bar{z}_j z} \right|^{k_j}, \forall z \in B(0,1),$$

特别地, 有

$$|f(0)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} |z_j|^{k_j}.$$

证明. 考虑函数

$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1 - \bar{z}_j z}{z - z_j} \right)^{k_j},$$

则 $g \in H(B(0,1))$ 且 g 在 $B(0,1)$ 内无零点. 由于在边界 $|z| = 1$ 上恒成立 $|\frac{1-\bar{z}_j z}{z - z_j}| = 1$, 所以任取 $\varepsilon > 0$, 存在充分小的 $\delta > 0$, 对任意 $1 - \delta < |z| < 1$, 成立 $\prod\limits_{j=1}^{n} |\frac{1-\bar{z}_j z}{z-z_j}|^{k_j} \leqslant 1 + \varepsilon$. 结合 $|f(z)| < 1$, 应用最大模原理可得, $|g(z)| < 1 + \varepsilon$, $\forall z \in B(0,1)$(总可以找到半径介于 $1 - \delta$ 和 1 之间的圆周 $|\zeta| = r$, 使得 $|z| < r$). 由 ε 的任意性可得 $|g(z)| \leqslant 1$, 即有

$$|f(z)| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{z_j - z}{1 - \bar{z}_j z} \right|^{k_j}, \forall z \in B(0,1).$$

$\square$

注 1.1. 不少同学构造完辅助函数以后就直接用最大模原理立得结论了, 这是不合适的, 因为 f 在 $|z| = 1$ 上根本没有定义. 尽管稍显繁琐, 还是应该按照上述证明写清楚应用最大模原理的过程.

4.5.20. 设 $f \in H(B(0,1))$, $f(0) = 0$, $f(B(0,1)) \subset B(0,1)$. 证明: 若存在 $z_1, z_2 \in B(0,1)$, 使得 $z_1 \neq z_2$, $|z_1| = |z_2|$, $f(z_1) = f(z_2)$, 则

$$|f(z_1)| = |f(z_2)| \leqslant |z_1|^2 = |z_2|^2.$$

证明. 考虑函数

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_1)}{1 - \overline{f(z_1)} f(z)} \frac{1 - \bar{z}_1 z}{z - z_1} \frac{1 - \bar{z}_2 z}{z - z_2}.$$

那么 $g \in H(B(0,1))$. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $|\frac{1-\bar{z}_j z}{z - z_j}| < 1 + \varepsilon$, $j = 1, 2$, $\forall 1 - \delta < |z| < 1$. 由此可得

$$|g(z)| \leqslant \left| \frac{1 - \bar{z}_1 z}{z - z_1} \right| \cdot \left| \frac{1 - \bar{z}_2 z}{z - z_2} \right| \leqslant (1 + \varepsilon)^2,\ \forall 1 - \delta < |z| < 1.$$

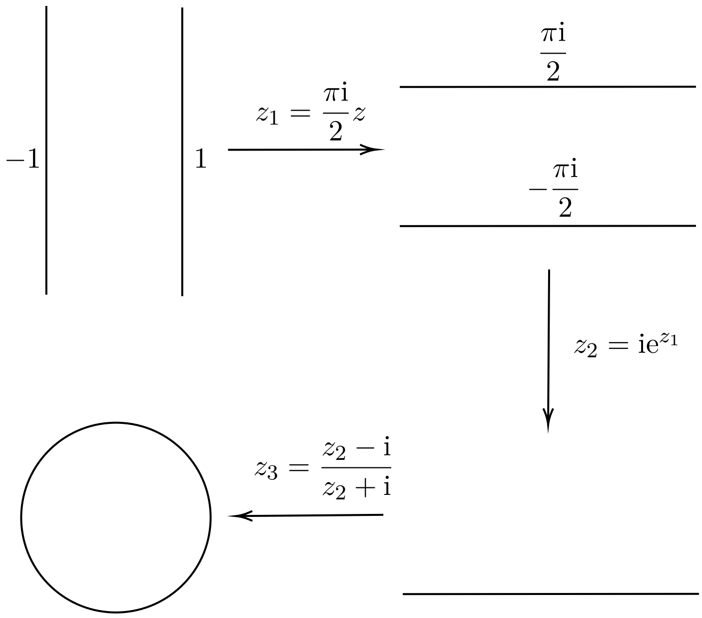
应用最大模原理可得 $|g(0)| < (1+\varepsilon)^2$, 由 ε 的任意性可得 $|g(0)| \leqslant 1$, 即

$$|f(z_1)| = |f(z_2)| \leqslant |z_1|^2 = |z_2|^2.$$

$\square$

4.5.30. 设 $f \in H(B(0,1)), f(0)=0$, 并且 $|\operatorname{Re} f(z)| < 1, \forall z \in B(0,1)$. 证明:
(1) $|\operatorname{Re} f(z)| \leqslant \dfrac{4}{\pi} \arctan |z|, \forall z \in B(0,1)$.
(2) $|\operatorname{Im} f(z)| \leqslant \dfrac{2}{\pi} \log \dfrac{1+|z|}{1-|z|}, \forall z \in B(0,1)$.

证明. 先将区域 $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} f(z)| < 1\}$ 变换为 $B(0,1)$, 并且把 0 映成 0. 下图给出了一个符合要求的双全纯变换:



复合起来就是 $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{2} z} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{2} z} + 1}$. 考虑函数

$$g(z) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{2} f(z)} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{2} f(z)} + 1}.$$

则 $g : B(0,1) \to B(0,1)$ 为全纯函数且 $g(0) = 0$, 应用 Schwarz 引理可得 $|g(z)| \leqslant |z|$. 另一方面, 由此反解可得

$$f(z) = \frac{2}{\pi \mathrm{i}} \log \frac{1+g(z)}{1-g(z)}.$$

则首先有 $\operatorname{Im} f(z) = -\frac{2}{\pi} \log \left| \frac{1+g(z)}{1-g(z)} \right|$. 而由 $|g(z)| \leqslant |z|$ 可得

$$\log \frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant \log \left| \frac{1+g(z)}{1-g(z)} \right| \leqslant \log \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

所以 $|\operatorname{Im} f(z)| \leqslant \frac{2}{\pi} \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$. 然后我们来估计实部 $\operatorname{Re} f(z) = \frac{2}{\pi} \arg \frac{1+g(z)}{1-g(z)}$. 由 $|\operatorname{Re} f(z)| \leqslant 1$ 可得 $|\arg \frac{1+g(z)}{1-g(z)}| < \frac{\pi}{2}$, 计算可得

$$\frac{1+g(z)}{1-g(z)} = \frac{(1+g(z))(1-\overline{g(z)})}{|1-g(z)|^2} = \frac{1-|g(z)|^2 + 2\mathrm{i} \operatorname{Im} g(z)}{|1-g(z)|^2}.$$

所以
$$\left|\arg\frac{1+g(z)}{1-g(z)}\right| = \left|\arctan\frac{2\operatorname{Im} g(z)}{1-|g(z)|^2}\right| \leqslant \arctan\frac{2|z|}{1-|z|^2} \leqslant 2\arctan|z|.$$
最后一步由 tan 的二倍角公式得到. 因此 $|\operatorname{Re} f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi}\arctan|z|$. □

5.1.2. 将下列初等函数在指定的区域 D 上展开为 Laurent 级数.

(1) $\dfrac{1}{z^2(z-1)}$, $D = B(1,1)\setminus\{1\}$.

(2) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $D = B(0,2)\setminus\overline{B(0,1)}$.

(3) $\operatorname{Log}\dfrac{z-1}{z-2}$, $D = B(\infty,2)$.

(4) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$, $D = B(\infty,2)$.

(5) $\dfrac{1}{(z-5)^n}$, $n\in\mathbb{N}$, $D = B(\infty,5)$.

解答. (1) 首先计算全纯函数 $\dfrac{1}{(1+w)^2}$ 在 $w\in B(0,1)$ 上的 Taylor 展开. 由 Weierstrass 定理可得
$$\frac{1}{(1+w)^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\frac{1}{1+w} = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)w^n.$$
由此可得在 $B(1,1)\setminus 1$ 上有
$$\frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{(1+z-1)^2} = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+2)(z-1)^n.$$
(2) 在 $B(0,2)\setminus\overline{B(0,1)}$ 上, 成立 $|\frac{1}{z}|<1, |\frac{z}{2}|<1$, 所以
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2(\frac{z}{2}-1)} - \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$
(3) 计算可得 $\frac{z-1}{z-2}$ 将 $B(\infty,2)$ 单叶地映成区域 $\{w\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} w > \frac{3}{4}\}$, 这说明 $\operatorname{Log}\frac{z-1}{z-2}$ 在 $B(\infty,2)$ 上可以取出全纯的单值分支, 我们来考虑主支 $\log\frac{z-1}{z-2}$. 由于在 $B(\infty,2)$ 上成立 $|\frac{1}{z}|<1, |\frac{2}{z}|<1$, 所以
$$\log\frac{z-1}{z-2} = \log\left(1-\frac{1}{z}\right) - \log\left(1-\frac{2}{z}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nz^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{nz^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{nz^n}.$$
因此
$$\operatorname{Log}\frac{z-1}{z-2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{nz^n} + 2k\pi\mathrm{i},\ k\in\mathbb{Z}.$$
(4) 我们考虑满足 $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$ 的单值分支, 另一个单值分支相差一个负号. 在 $B(\infty,2)$ 上有 $|\frac{1}{z}|<1$, $|\frac{2}{z}|<1$, 从而计算可得
$$\begin{aligned}\sqrt{(z-1)(z-2)} &= z\sqrt{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{2}{z}\right)} \\ &= z\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{m}\frac{(-1)^m}{z^m}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{(-2)^n}{z^n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{m,n\geqslant 0\\ m+n=k}}\binom{\frac{1}{2}}{m}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^k 2^n\right)\frac{1}{z^{k-1}}.\end{aligned}$$

(5) 在 $B(\infty,5)$ 上有 $|\frac{5}{z}|<1$, 从而计算可得

$$\frac{1}{(z-5)^n}=\frac{1}{z^n}\frac{1}{(1-\frac{5}{z})^n}=\frac{1}{z^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}\left(-\frac{5}{z}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-5)^k\frac{1}{z^{n+k}}.$$

□

5.1.4. 设 $0<r<R<\infty$, $D=B(0,R)\setminus\overline{B(0,r)}$. 证明: 若 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$ 双全纯地把 D 映成域 G, 则 G 的面积为

$$\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}n|a_n|^2(R^{2n}-r^{2n}).$$

证明. 直接计算可得

$$\begin{aligned}
\operatorname{Area}(D)&=\iint_D|f'(z)|^2\mathrm{d}A\\
&=\int_r^R\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}|f'(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2\mathrm{d}\theta\\
&=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\int_r^R\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}ma_m\rho^{m-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-1)\theta}n\bar{a}_n\rho^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\int_r^R\rho\mathrm{d}\rho mna_m\bar{a}_n\rho^{m+n-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_r^R2\pi n^2|a_n|^2\rho^{2n-1}\mathrm{d}\rho\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi n^2|a_n|^2\cdot\frac{\rho^{2n}}{2n}\bigg|_r^R\\
&=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2(R^{2n}-r^{2n}).
\end{aligned}$$

□

5.2.2. 下列初等全纯函数有哪些奇点, 并指出其类别.
(1) $\sin\dfrac{1}{1-z}$.
(2) $\sin\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$.
(3) $\mathrm{e}^{\tan z}$.

解答. (1) 可能的奇点集合为 $z=1,\infty$, 由于 $\lim\limits_{z\to1}\sin\frac{1}{1-z}$ 不存在, 所以 $z=1$ 是 $f(z)=\sin\frac{1}{1-z}$ 的本性奇点. 又因为 $f(\frac{1}{z})=\sin\frac{z}{z-1}$, 所以 $z=0$ 是 $f(\frac{1}{z})$ 的可去奇点, 进而 ∞ 是 f 的可去奇点.
(2) 可能的奇点集合为 $z=0,\frac{2}{(2k+1)\pi}(k\in\mathbb{Z}),\infty$. 当 $z\to\frac{2}{(2k+1)\pi}$ 时, $\cos\frac{1}{z}\to0$, 所以此时 $\sin\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}$ 的极限不存在, $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ 为 $f(z)=\sin\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}$ 的本性奇点. 同时由此可得 $z=0$ 是 f 的非孤立奇点. 最后, 由于 $f(\frac{1}{z})=\sin\frac{1}{\cos z}$, 所以 $z=0$ 是 $f(\frac{1}{z})$ 的可去奇点, 进而 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.
(3) 可能的奇点集合为 $z=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z}),\infty$. 由于 $z\to k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时 $\tan z\to\infty$, 所以此时 $f(z)=\mathrm{e}^{\tan z}$ 的极限不存在, $z=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 是 $f(z)$ 的本性奇点. 由此可得 ∞ 是 f 的非孤立奇点. □

5.2.3. 证明: 若 z_0 是全纯函数 $f: B(z_0,r)\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的本性奇点, 则 z_0 也是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的本性奇点.

证明. 由于 f 非零, 故 z_0 首先是 $\frac{1}{f(z)}$ 的孤立奇点. 任取非零复数 $a\neq b$, 由于 z_0 是 f 的本性奇点, 故存在 $z_n\to z_0$, $w_n\to z_0$, 使得 $f(z_n)\to a, f(w_n)\to b$, 由此可得 $\frac{1}{f(z_n)}\to\frac{1}{a}$, $\frac{1}{f(w_n)}\to\frac{1}{b}$, 所以 $\frac{1}{f}$ 在 z_0 处的极限不存在, z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的本性奇点. □

5.2.6. 设 f 是 $B(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ 上非常数的全纯函数. 证明: 若 z_0 是 f 的零点集的极限点, 则 z_0 是 f 的本性奇点.

证明. 假设 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a$ 存在, 设 $\{z_n\}$ 为 f 的零点序列, 并且收敛于 z_0, 则由 $f(z_n)=0$ 可得 $a=0$, 故 z_0 是 f 的可去奇点, 从而补充定义 $f(z_0)=0$ 可得 $f\in H(B(z_0,R))$, 由唯一性定理可得 f 恒为零, 这与 f 非常数矛盾. 因此 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 不存在, z_0 是 f 的本性奇点. □

5.3.1. 求出 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 f, 使得 $|f(z)|=1, \forall z\in\partial B(0,1)$.

证明. 根据亚纯函数的唯一性定理, f 在 $B(0,1)$ 内的零点和极点个数均有限, 分别设为 $z_1,\cdots,z_n$ 和 $w_1,\cdots,w_m(z_j,z_k$ 可以相同, 极点类似). 考虑函数

$$g(z)=f(z)\prod_{j=1}^{n}\frac{1-\bar{z}_jz}{z-z_j}\prod_{k=1}^{m}\frac{z-w_k}{1-\bar{w}_kz}.$$

那么 g 也是 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 并且: (i) $g\in H(\overline{B(0,1)})$, (ii) $|g(z)|=1, \forall|z|=1$, (iii) g 在 $B(0,1)$ 内无零点. 类似习题 4.5.15 的证明可得 $g(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\theta\in\mathbb{R})$ 恒成立, 因此所有满足条件的亚纯函数为

$$f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-\bar{z}_jz}{z-z_j}\prod_{k=1}^{m}\frac{z-w_k}{1-\bar{w}_kz},\ \theta\in\mathbb{R},\ n,m=0,1,\cdots,\ z_j,w_k\in B(0,1).$$

□

5.3.3. 设 $P_n(z)$ 是 n 次多项式, $n\in\mathbb{N}$. 证明: $\mathrm{e}^z-P_n(z)$ 有无数个零点.

证明. 这里给出两种证法.

(1) 考虑函数 $f(z)=P_n(z)\mathrm{e}^{-z}$, 则 ∞ 是 f 的本性奇点. 由于 f 只有有限个零点, 根据 Picard 大定理, 在 ∞ 的某个邻域内 f 可以无穷次地取到任一非零值. 由此可得 $f(z)=1$ 有无穷多个解, 即 $\mathrm{e}^z-P_n(z)$ 有无数个零点.

(2) 下面给出一个不用 Picard 大定理的证法. 设 $\mathrm{e}^z-P_n(z)$ 只有有限个零点, 设为 $z_1,\cdots,z_n$, 重数分别为 $k_1,\cdots,k_n$. 考虑多项式 $Q(z)=(z-z_1)^{k_1}\cdots(z-z_n)^{k_n}$, 则 $\frac{\mathrm{e}^z-P_n(z)}{Q(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上只有可去奇点, 从而是整函数, 并且在复平面上无零点. 由此可得存在整函数 $f(z)$, 满足

$$\frac{\mathrm{e}^z-P_n(z)}{Q(z)}=\mathrm{e}^{f(z)}$$

(习题 5.3.2, 实际上第三次习题课就证过这个结论). 由此可得存在常数 $C>0$, 当 $|z|$ 充分大时, 成立

$$\mathrm{e}^{\operatorname{Re}f(z)}=\left|\frac{\mathrm{e}^z-P_n(z)}{Q(z)}\right|\leqslant C\mathrm{e}^{|z|}.$$

所以存在常数, 当 $|z|$ 充分大时, $\operatorname{Re} f(z) \leqslant A|z|$. 现在, 我们需要一个引理, 即史济怀习题 4.3.6. 设 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 为整函数, $A(r)=\max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$, 则

$$|a_n| r^n \leqslant 2A(r) - 2\operatorname{Re} f(0),\ n=1,2,\cdots$$

回忆课上证明过 $a_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \mathrm{d}\theta$. 考虑函数 $g(z)=A(r)-f(z)$, 则 $\operatorname{Re} g(z) \geqslant 0$, 并且 $g(z)=A(r)-a_0-a_1 z-\cdots$, 因此

$$|a_n| r^n \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g(re^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{d}\theta = 2A(r) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{d}\theta = 2A(r) - \operatorname{Re} f(0).$$

应用这个引理, 可得对充分大的 r 和 $n=1,2,\cdots$, 成立

$$|a_n| \leqslant 2Ar^{1-n} - r^{-n} \operatorname{Re} f(0).$$

当 $n \geqslant 2$ 时, 令 $r \to +\infty$, 即可得 $a_n=0$. 这说明 $f(z)=az+b$, 即

$$\mathrm{e}^z = Q(z)\mathrm{e}^{az+b} + P_n(z).$$

两边求有限次导可得, 存在多项式 $R(z)$, 使得 $\mathrm{e}^z = R(z)\mathrm{e}^{az}$, 即 $\mathrm{e}^{(1-a)z} = R(z)$. 比较零点个数可得指数函数不可能为多项式, 所以 $a=1$, 因此

$$\mathrm{e}^z = Q(z)\mathrm{e}^{z+b} + P_n(z) \Rightarrow P_n(z) = \mathrm{e}^z (bQ(z)-1).$$

但是左边的多项式零点有限, 而右边的函数零点无限, 矛盾! □

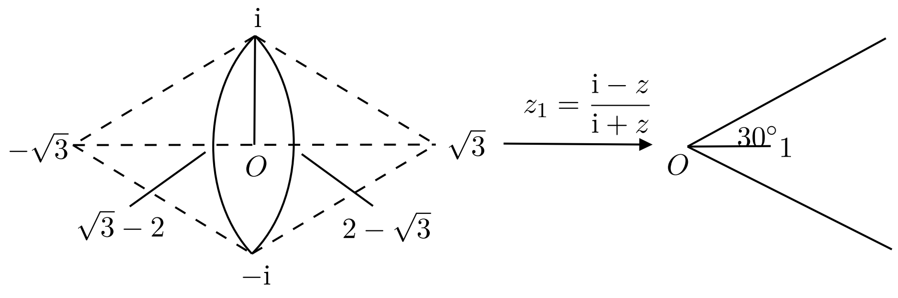
2 补充习题

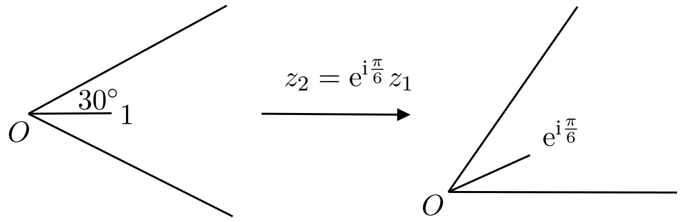
1. (2011 期末) 求一个单叶全纯映射, 把区域 D 映为上半平面, 其中 $D=\Omega \setminus [0,\mathrm{i}]$, $\Omega = B(\sqrt{3},2) \cap B(-\sqrt{3},2)$, 这里 $[0,\mathrm{i}]$ 表示连接 0 和 i 的线段.

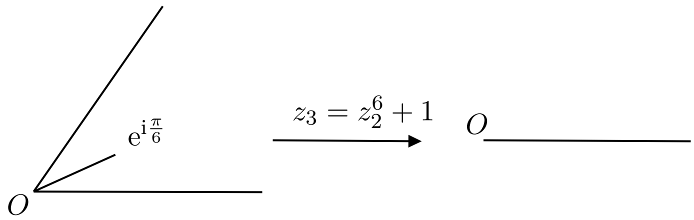
解答. 两段圆弧有两个不同交点, 我们先求分式线性变换把 i 映成 0, 把 $-\mathrm{i}$ 映成 ∞, 则

$$f_1(z) = \lambda \frac{\mathrm{i}-z}{z+\mathrm{i}}.$$

代入 $z=\sqrt{3}-2$ 可得 $f_1(\sqrt{3}-2) = \lambda(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2})$, 选取 $\lambda = 1$, 则 $f_1(2-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$, $f_1(0)=1$. 由此可得第一步变换的结果:







即区域 $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{6}\}$, 去掉一条割线 $[0, 1]$. 然后把这个角状域逆时针旋转 $30°$, 即

然后考虑六次幂, 然后向右平移 1 所得区域为全平面去掉割线 $[0, \infty)$.

最后作变换 $z_4 = \sqrt{z_3}$(选取满足 $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$ 的单值分支), 即可得上半平面. 综上所述, 所求的一个单叶全纯映射为

$$f(z) = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}\right)^6}.$$

□

2. (史济怀习题 2.5.21, 略改动) 证明存在常数 $\rho > 0$, 使得存在单叶全纯映射将区域 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0, |z - a| > r\}$ 映为同心圆环 $\{w \in \mathbb{C} : \rho < |w| < 1\}$, 其中 $0 < r < a$. 并求出一个满足要求的单叶全纯映射.

证明. 处理这种二连通域, 我们可以仿照教材例题的方法, 确定边界两个圆周的一对公共对称点. 原区域的边界是圆周 $\partial B(a, r)$ 和虚轴, 所以待求的一对对称点必然落在实轴上, 设其为 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. 联立方程可得

$$x_1 = -x_2,\ (x_1 - a)(x_2 - a) = r^2.$$

求解可得 $x_1 = -\sqrt{a^2 - r^2}, x_2 = \sqrt{a^2 - r^2}$. 现在我们找一个分式线性变换, 把 x_1, x_2 分别映成 ∞ 和 0, 即形如

$$f(z) = \lambda \frac{z - \sqrt{a^2 - r^2}}{z + \sqrt{a^2 - r^2}},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

我们让虚轴映为圆周 $|w| = 1$, 让圆周 $\partial B(a, r)$ 映为圆周 $|w| = \rho$, 则

$$|f(0)| = |\lambda| = 1,\ |f(a - r)| = |\lambda| \frac{a - \sqrt{a^2 - r^2}}{r} = \rho.$$

所以此时需要有 $\rho = \frac{a - \sqrt{a^2 - r^2}}{r}$, 并且一个可能的变换为

$$f(z) = \frac{z - \sqrt{a^2 - r^2}}{z + \sqrt{a^2 - r^2}}.$$

不难验证此时该变换确实将原区域双全纯地映成圆环 $\{z \in \mathbb{C} : \rho < |z| < 1\}$. □

3. (2018 期中) 设全纯函数 $f: B(0,1) \to B(0,1)$ 有两个不同的不动点, 证明 f 为恒等映射.

证明. 设 $a, b \in B(0,1)$ 为 f 的两个不同的不动点, 设 $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ 为 Möbius 函数, 考虑全纯函数 $g = \varphi_a \circ f \circ \varphi_a^{-1} : B(0,1) \to B(0,1)$, 则

$$g(0) = \varphi_a(f(a)) = \varphi_a(a) = 0,\ g(\varphi_a(b)) = \varphi_a(f(b)) = \varphi_a(b).$$

由 Schwarz 引理及其取等条件可得 $g(z) = z, \forall z \in B(0,1)$, 因此 $f = \varphi_a^{-1} \circ g \circ \varphi_a = \mathrm{id}_{B(0,1)}$. □

4. (2021 华班期中) 设 $\mathbb{H}$ 为上半平面, f 在 $\mathbb{H}$ 上全纯有界, 且在 $\overline{\mathbb{H}}$ 上连续. 若 $\sup\limits_{z\in\partial\mathbb{H}} |f(z)| \leqslant 1$, 利用有界区域上全纯函数的最大模原理证明:

$$\sup_{z\in\mathbb{H}} |f(z)| \leqslant 1.$$

证明. 任取 $n \in \mathbb{N}$, 在区域 $\overline{\mathbb{H}}$ 上我们选定多值函数 $(z+\mathrm{i})^{-\frac{1}{n}}$ 的一个单值全纯分支, 并且考虑函数 $g(z) = (z+\mathrm{i})^{-\frac{1}{n}} f(z)$. 在边界 $\partial\mathbb{H}$ 上, 成立 $|g(z)| \leqslant |f(z)| \leqslant 1$. 另一方面, 由于 f 有界, 所以 $z \to \infty$ 时 $g(z) \to 0$. 由此可得对于充分大的 $R > 0$, 在半圆周 $\partial B(0,R) \cap \mathbb{H}$ 上总成立 $|g(z)| < 1$. 此时在区域 $B(0,R) \cap \mathbb{H}$ 上对 g 应用最大模原理可得 $|g(z)| \leqslant 1, \forall z \in B(0,R) \cap \mathbb{H}$. 由于 R 可以任意大, 所以在 $\mathbb{H}$ 上恒成立 $|g(z)| \leqslant 1$. 假设存在 $z_0 \in \mathbb{H}$ 使得 $|f(z_0)| > 1$, 选取充分大的 n 使得 $0 < \frac{1}{n} < \frac{\log|f(z_0)|}{\log(1+|z_0|)}$, 则

$$|(z_0+\mathrm{i})^{-\frac{1}{n}}| \geqslant (|z_0|+1)^{-\frac{1}{n}} > |f(z_0)| \Rightarrow |g(z_0)| > 1,$$

矛盾! □

5. (Stein Exercise 3.15(b)) 用最大模定理证明: 若 f 在 $\mathbb{D}$ 上有界且全纯, 并且当 $\theta < \arg z < \varphi$ 时, 函数值随 $|z| \to 1$ 一致收敛于零, 则 f 恒为零.

证明. 设 $\alpha = \frac{\varphi-\theta}{2}$, 考虑函数

$$g(z) = f(z) f(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) \cdots f(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}),$$

其中 $n = \lceil \frac{2\pi}{\alpha} \rceil$. 对任意 $z \in B(0,1)$, 必然存在 $k = 0, 1, \cdots, n$, 使得 $\theta < \arg(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}) < \varphi$. 设 $|f(z)| \leqslant M, \forall z \in \mathbb{D}$, 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 对任意 $z \in \mathbb{D}$ 满足 $1-\delta < |z| < 1$ 且 $\theta < \arg z < \varphi$, 有 $|f(z)| < \varepsilon$. 所以只要 $1-\delta < |z| < 1$, 则成立

$$|g(z)| \leqslant M^{n-1}\varepsilon.$$

由最大模原理可得 $|g(z)| \leqslant M^{n-1}\varepsilon$ 对任意 $z \in \mathbb{D}$ 成立, 由 ε 的任意性可得 g 恒为零. 由此可得对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 z_n 满足 $|z_n| = \frac{1}{n+1}$ 且 $f(z_n) = 0$, 而 $\{z_n\}$ 以 0 为聚点, 由唯一性定理可得 f 恒为零. □

6. (2019 期末) 设 $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 是单叶全纯函数, 并且满足 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 证明:

$$\inf\{|w| : w \notin f(\mathbb{D})\} \leqslant 1.$$

并且等号成立当且仅当 $f(z) = z$, $\forall z \in \mathbb{D}$.

证明. 如果 $\inf\{|w| : w \notin f(\mathbb{D})\} \geqslant 1$, 则有 $\mathbb{D} \subset f(\mathbb{D})$. 设 $g = f^{-1}|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, 则 g 为 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数, 并且

$$g(0) = 0,\ g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

由 Schwarz 引理的取等条件可得 $g(z) = z$, 因此 $f^{-1}|_{\mathbb{D}} = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. 结合 f 是 $\mathbb{D}$ 上的单叶函数即可得 $f = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$, 此时只能有 $\inf\{|w| : w \notin f(\mathbb{D})\} = 1$, 即证. □

7. (2016 期末) 设 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, $f \in H(\Omega)$ 且满足

$$\iint_\Omega |f(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty.$$

证明: $z = 0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

证明. 设 f 在 Ω 上的 Laurent 展开式为 $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, 任取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, 考虑区域 $\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < \frac{1}{2}\}$, 则

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega_\varepsilon} |f(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} a_n \bar{a}_m \iint_{\Omega_\varepsilon} z^n \bar{z}^m \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n,m} a_n \bar{a}_m \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta} \mathrm{d}\theta \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} r^{n+m+1} \mathrm{d}r \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi |a_n|^2}{2n+1} \left(\frac{1}{2^{2n+1}} - \varepsilon^{2n+1} \right).
\end{aligned}$$

由 $\iint_\Omega |f(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$ 可得, 当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时上述正项级数收敛于有限常数, 从而每一项在 $\varepsilon \downarrow 0$ 时都是有界的, 所以 $n \leqslant -1$ 时必有 $a_n = 0$, 因此 f 的 Laurent 展开式的主要部分恒为零, 即 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点. □

8. (史济怀习题 5.2.11) 设 f 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上全纯, 并且 0 和 ∞ 都是 f 的本性奇点. 证明: 若令 $A(r) = \max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$, $0 < r < \infty$, 则

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log A(r)}{\log r} = \infty,\ \lim_{r\to 0} \frac{\log A(r)}{\log \frac{1}{r}} = \infty.$$

证明. 我们只需证明第一个极限, 对于第二个极限, 考虑函数 $g(z) = f(\frac{1}{z})$, 则 ∞ 是 g 的本性奇点, 并且 $\tilde{A}(r) = A(\frac{1}{r})$, 其中 $\tilde{A}(r) = \max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} g(z)$, 因此

$$\lim_{r\to 0} \frac{\log A(r)}{\log \frac{1}{r}} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log A(\frac{1}{r})}{\log r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log \tilde{A}(r)}{\log r} = \infty.$$

考虑反证, 假设极限式不成立, 则存在 $N \in \mathbb{N}$ 和 $r_k \to \infty$, 满足 $A(r_k) \leqslant r_k^N$, $k = 1, 2, \cdots$. 设 f 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上的 Laurent 展开为 $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, 我们先证明一个引理:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{a_n r^n + \overline{a_{-n}} r^{-n}}{2}.$$

事实上, 我们有

$$\operatorname{Re} f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n r^n e^{in\theta} + \bar{a}_n r^n e^{-in\theta}}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n r^n + \overline{a_{-n}} r^{-n}}{2} e^{in\theta}.$$

由此立证. 因此当 n 不为零时, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n r_k^n + \overline{a_{-n}} r_k^{-n}}{2}\right| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}(r_k^N - \operatorname{Re} f(r_k e^{i\theta}))e^{-in\theta}d\theta\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(r_k^N - \operatorname{Re} f(r_k e^{i\theta}))d\theta \\ &= r_k^N - \operatorname{Re} a_0.\end{aligned}$$

由此可得

$$\left|\frac{a_n + \overline{a_{-n}} r_k^{-2n}}{2}\right| \leqslant r_k^{N-n} - r_k^{-n} \operatorname{Re} a_0.$$

对任意 $n > N$, 令 $k \to \infty$, 结合 $r_k \to \infty$ 即可得 $a_n = 0$, 这与 ∞ 是 f 的本性奇点矛盾. □

9. (史济怀习题 5.3.5) 设 $f(z)$ 是整函数, 证明:
(1) 若 $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $f(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$, 则 $f(z)$ 是奇函数.
(2) 若 $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $f(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, 则 $f(z)$ 是偶函数.

证明. (1) 考虑函数

$$g(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots.$$

由题设可得 $g(0) \in \mathbb{R} \cap i\mathbb{R}$, 所以 $a_0 = 0$. 然后考虑函数 $g_1(z) = \frac{g(z)}{z^2}$, 则 $g_1 = a_2 + a_4 z^2 + \cdots$ 为整函数. 由 g 的定义可得 $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}, g(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$, 所以类似地有 $g_1(0) = 0$, 即 $a_2 = 0$. 反复归纳即可得 $a_{2n} = 0, n = 0, 1, 2, \cdots$, 所以 g 恒为零, 即 f 是奇函数.
(2) 考虑函数 $g(z) = zf(z)$, 则 g 为整函数, 并且 $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}, g(i\mathbb{R}) \subset i\mathbb{R}$. 由 (1) 可得 g 是奇函数, 所以 $f(z) = \frac{g(z)}{z}$ 为偶函数. □

3 补充内容: 单叶函数

本节我们的参考书是李忠的《复分析导引》, 主要涵盖教材 5.1 节的习题 5, 6, 7.

这一节我们来研究单位圆 $\mathbb{D}$ 上单叶全纯函数的性质. 不过单叶函数这个范畴总显得有些大, 我们干脆再补充一些规范化要求, 来研究更特殊的一类函数:

定义 3.1. 我们称单位圆 $\mathbb{D}$ 上满足: (i) $f(0) = 0$; (ii) $f'(0) = 1$ 的单叶全纯函数为 ***S* 类函数**[1]. 由定

[1]除此以外, 还有一类单叶函数, 称为 Σ 类函数, 定义为单位圆外部上具有 Laurent 展开式

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$$

的函数. 换言之, Σ 类单叶函数满足规范条件: (i) $g(\infty) = \infty$; (ii) $\lim_{z\to\infty} \frac{g(z)}{z} = 1$. 从定义可以得出, 若 f 为 S 类函数, 则 $f(\frac{1}{z})^{-1}$ 是 Σ 类函数.

义不难看出, S 类函数具有如下的 Taylor 展开式:

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n,\ z\in\mathbb{D}.$$

只要研究清楚 S 类函数, 单位圆上的单叶全纯函数的性质就迎刃而解了, 因为对任意 $\mathbb{D}$ 上的单叶全纯函数, 我们总可以复合上 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 内的一个元素, 再作合适的伸缩, 从而得到一个 S 类函数. 首先, 我们列出 S 类函数的一些简单不变性质.

命题 3.2. 若 f 为 S 类函数, 则下列函数均为 S 类函数.

1. 共轭: $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$.
2. 旋转: $g(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z)$.
3. 伸缩: $g(z)=\lambda^{-1}f(\lambda z)$, $\lambda>0$.
4. Möbius 变换: $g(z)=\dfrac{f(\frac{z-a}{1-\bar{a}z})-f(a)}{(1+|a|^2)f'(a)}$, $a\in\mathbb{D}$.
5. $g(z)=\dfrac{wf(z)}{w-f(z)}$, $w\in\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{D})$.
6. $g(z)=z\sqrt{\dfrac{f(z^2)}{z^2}}$, 其中 $\sqrt{}$ 取定了单值分支.

这些性质的验证是十分简单的, 我们留给同学自行练习.

下面我们开始讨论 S 类函数的一些重要性质. 首先要证明一个引理, 这也是教材习题 5.1.5 给出的面积原理, 由 Gronwall 在 1914 年首先证明.

引理 3.3 (面积原理)**.** 若 $f(z)=\dfrac{1}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是 $B(0,1)\setminus\{0\}$ 上的单叶全纯映射, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}n|a_n|^2\leqslant 1.$$

注 3.4. 事实上, 把 f 换成 Σ 类函数, 结论依旧成立.

证明. 考虑函数 $g(z)=f(\frac{1}{z})$, 则 $g(z)=z+\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n}$ 为 $B(\infty,1)$ 上的单叶全纯映射 (并且属于 Σ 类). 设 g 将圆周 $|z|=r(r>1)$ 映为 Jordan 曲线 Γ_r, 设 Γ_r 的内部为区域 Ω_r, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{Area}(\Omega_r)&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\Gamma_r}\bar{\zeta}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{|z|=r}g'(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}na_nr^{-n-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\theta}\right)\left(r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+\sum_{m=0}^{\infty}\bar{a}_mr^{-m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\right)\cdot\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=\pi r^2-\pi\sum_{n=0}^{\infty}n|a_n|^2r^{-2n}.
\end{aligned}$$

这样, 我们就得到了

$$\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2 r^{-2n} \leqslant r^2,\ \forall r > 1.$$

对任意正整数 N, 自然有 $\sum\limits_{n=0}^{N} n|a_n|^2 r^{-2n} \leqslant r^2$, 此时两边令 $r \downarrow 1$ 即可得 $\sum\limits_{n=0}^{N} n|a_n|^2 \leqslant 1$. 由 N 的任意性可得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2 \leqslant 1$. □

根据上述引理, 我们可以直接得到 $|a_1| \leqslant 1$ 对任意 Σ 类函数成立. 并且当 $|a_1| = 1$ 时, 必须有 $a_2 = a_3 = \cdots = 0$, 此时对应的 Σ 类函数为

$$g(z) = z + a_0 + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{z}.$$

有了上述引理, 我们就可以证明 Bieberbach 在 1916 年证明的结果了.

定理 3.5 (Bieberbach)**.** 设 $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ 为 S 类函数, 则 $|a_2| \leqslant 2$. 并且该估计已是最优的.

证明. 考虑函数

$$g(z) = \frac{f(z^2)}{z^2} = 1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \cdots.$$

由 f 的单叶性可得 g 在 $\mathbb{D}$ 中非零, 选取 $\sqrt{g(z)}$ 的一个单值全纯分支, 使得 $\sqrt{g(0)} = 1$. 然后考虑函数 $h(z) = zg(z)$, 下面我们先证明 h 是 S 类函数. h 的单叶性可由 f 的单叶性推得, 其 Taylor 展开式为

$$h(z) = z\sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \cdots} = z + \frac{a_2}{2} z^3 + \cdots.$$

满足 S 类函数的规范条件, 即证. 由此可得

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1 + \frac{a_2}{2}z^2 + \cdots} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{a_2}{2}z^2 + \cdots\right) = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{2}z + \cdots$$

在 $B(0,1) \setminus \{0\}$ 内单叶全纯, 由面积原理即可得 $\frac{|a_2|^2}{4} \leqslant 1 \Rightarrow |a_2| \leqslant 2$.

下面我们来看看为什么这个估计最优, 实际只需找到一个 S 类函数, 满足 $|a_2| = 2$. 考虑 Koebe 函数

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots,$$

单叶性容易验证, 并且它是 S 类函数, 满足 $a_n = n (n = 2, 3, \cdots)$. 该函数还单叶地将 $B(0,1)$ 映成 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$. □

注 3.6. 我们还可以来看看所有使得 Bieberbach 定理取等的函数. 根据证明过程, 若 $|a_2| = 2$, 则有 $a_3 = a_4 = \cdots = 0$, 因此

$$h(z) = z\sqrt{1 + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z^2} = z + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z^3 + 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} z^5 + \cdots.$$

结合 $f(z^2) = zh(z)$ 计算可得

$$f(z) = z + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z^2 + 3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} z^3 + \cdots = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z).$$

这说明 f 必定是 Koebe 函数的旋转.

在这个定理的基础上, Bieberbach 提出了进一步的猜想: 若 $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$ 为 S 类函数, 则 $|a_n|\leqslant n$, $n=2,3,\cdots$. 该猜想于 1984 年被 Louis de Branges 完全证明.

Bieberbach 定理有着许多的应用, 这里我们给出两个实例.

推论 3.7 (Koebe $\frac{1}{4}$ 掩盖定理)**.** 设 f 为 S 类函数, 则 $f(\mathbb{D})\supset B(0,\frac{1}{4})$, 并且 $\frac{1}{4}$ 已是最优的半径.

证明. 任取 $w\notin f(\mathbb{D})$, 我们只需证明 $|w|\geqslant\frac{1}{4}$. 考虑函数 $g(z)=\frac{wf(z)}{w-f(z)}$, 由 f 单叶可得 g 单叶, 并且 g 的 Taylor 展开为

$$g(z)=\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\right)\left(1+\frac{1}{w}\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\right)+\cdots\right)=z+\left(a_2+\frac{1}{w}\right)z^2+\cdots.$$

所以 g 是 S 类函数. 由此可得

$$\frac{1}{|w|}\leqslant\left|a_2+\frac{1}{w}\right|+|a_2|\leqslant 4\Rightarrow|w|\geqslant\frac{1}{4}.$$

□

注 3.8. 这里我们给两个相关的注记.

1. 如果 S 类函数 f 还是奇函数, 那么上述定理可以改进为 $f(\mathbb{D})\supset B(0,\frac{1}{2})$.

2. 如果我们不再要求 f 是单射, 仅仅要求 $f\in H(\mathbb{D})$ 且 $f(0)=0,f'(0)=1$, 那么成立如下的 Bloch 定理: 存在圆盘 $S\subset\mathbb{D}$, 使得 f 在 S 内单叶且 $f(S)$ 包含半径为 $\frac{1}{72}$ 的圆盘. Bloch 定理可以用于证明 Picard 小定理, 可以参考 GTM11 Conway 的单复变函数相关章节.

推论 3.9 (偏差定理)**.** 设 f 为 S 类函数, 则成立估计式

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2},\forall z\in\mathbb{D}.$$

这个定理的证明极具观赏性.

证明. 固定一点 $z\in\mathbb{D}$, 考虑函数

$$g(w)=\frac{f(\frac{w+z}{1+\bar{z}w})-f(z)}{(1-|z|^2)f'(z)}.$$

容易看到 g 是单叶的, 并且 $g(0)=0$, $g'(0)=1$, 所以 g 是 S 类函数. 计算可得

$$g''(0)=(1-|z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)}-2\bar{z}.$$

应用 Bieberbach 定理可得 $|g''(0)|\leqslant 4$, 由此可得

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|\leqslant\frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

下面我们设 $|z|=r$, 则

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}=re^{i\theta}\frac{f''(z)}{f'(z)}=r\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\log f'(z)=r\frac{\partial}{\partial r}\log f'(z).$$

由此可得 $\mathrm{Re}\,\frac{zf''(z)}{f'(z)} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|$, 所以有

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leqslant r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(r)| \leqslant \frac{2r^2+4r}{1-r^2}.$$

利用 $f'(0)=1$, 积分可得估计式

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

结合 $f(0)=0$ 可得

$$|f(z)| = \left|\int_0^z f'(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \int_0^{|z|} \frac{1+r}{(1-r)^3}\mathrm{d}r = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

$$|f(z)| = \left|\int_0^z f'(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right| \geqslant \int_0^{|z|} \frac{1-r}{(1+r)^3}\mathrm{d}r = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}.$$

$\square$