2.2 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ Riemann-Cauchy方程: $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$

2. (1) $\mathrm{Re}f(z)=const \Leftrightarrow u(x,y)=const \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，即 $v=const$

(2) 同理

(3) $|f(z)|=const \Leftrightarrow u^2+v^2=c^2$

对此式求偏导: $\begin{cases}2uu_x+2vv_x=0\\ 2uu_y+2vv_y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2uu_x-2vu_y=0\\ 2uu_y+2vu_x=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}(u^2+v^2)u_x=0\\ (u^2+v^2)u_y=0\end{cases}$，即 $c^2u_x=c^2u_y=0$

1° $c\neq 0 \Rightarrow u_x=u_y=0$，$u=const$，同理 $v=const$

2° $c=0 \Rightarrow u=v=0$

(4) $\arg f(z)=const$，则 $\exists\, a,b$ 不全为0，s.t. $au+bv=0$

求偏导有 $\begin{cases}au_x+bv_x=0\\ au_y+bv_y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}au_x-bu_y=0\\ au_y+bu_x=0\end{cases}$

$\Rightarrow (a^2+b^2)u_x=(a^2+b^2)u_y=0 \Rightarrow u_x=u_y=0$

$u=const$，同理 $v=const$

(5) $\mathrm{Re}f(z)=(\mathrm{Im}f(z))^2 \Leftrightarrow u=v^2$

求偏导: $\begin{cases}u_x=2vv_x\\ u_y=2vv_y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u_x=-2vu_y\\ u_y=2vu_x\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}u_x(1+4v^2)=0\\ u_y(1+4v^2)=0\end{matrix}$

$\Rightarrow u_x=u_y=0$，$u=const$ 而 $u=v^2$，v连续 $\Rightarrow v=const$

5. $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y})$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y})$

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\end{cases}, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan\frac{y}{x}$$

$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$. $\frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\theta}{r}$

$\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\theta}{r}$，代入即得

9. $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y})=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+i(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}))$

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+i(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}))$

$|\frac{\partial f}{\partial z}|^2-|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}|^2=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$

若f全纯，$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=|\frac{\partial f}{\partial z}|^2=|f'|^2$

几何意义：$|f'|^2$为面积在f作用下的局部放大倍数

12 由u调和，知$\exists v$, s.t $g=u+iv$局部全纯

$\Rightarrow u\circ f=\mathrm{Re}(g\circ f)$，而全纯关于复合封闭 $\Rightarrow g\circ f$全纯

$\Rightarrow \mathrm{Re}(g\circ f)$调和，$u\circ f$调和

2.4

15. $\varphi(z_1)=\varphi(z_2) \Leftrightarrow (z_1-z_2)=\frac{(z_1-z_2)}{z_1z_2} \Leftrightarrow z_1=z_2$或$z_1z_2=1$

只需证明：下面四个域中只要$z_1\neq z_2$则$z_1z_2\neq 1$

(1) 若$z_1z_2=1 \Rightarrow z_1=\frac{1}{z_2}$ 如果 $\mathrm{im}\,z_2>0 \Rightarrow \mathrm{im}\,z_1<0$，矛盾

(2) 同(1)

(3) $0<|z_1|,|z_2|<1 \Rightarrow 0<|z_1z_2|<1$，$z_1z_2\neq 1$ (4) 同(3)

16. (1) (2) 的像 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]\cup[1,\infty)=A$

(3) (4) 的像 $\mathbb{C}\setminus[-1,1]=B$

证明: (1) 对于 $z_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $z^2-2zz_0+1=0$ 有两个根 z_1,z_2

由韦达定理 $z_1z_2=1$ 而 $z_1,z_2\notin\mathbb{R}$ (否则 $z_0\in\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ z_1,z_2 中必有一个虚部大于0, 不妨设为 z_1

$\Rightarrow z_0=\varphi(z_1)$ $\Rightarrow z_0$ 在像集中

对于 $z_0\in\mathbb{R}$, z^2-2zz_0+1 若有解 z_1,z_2

则 z_1,z_2 共轭且 $|z_1|=|z_2|=1$ $\Rightarrow$ 设 $z_1=e^{i\theta}$, $z_2=e^{-i\theta}$

$\Rightarrow z_0=\cos\theta$ 可取遍 $(-1,1)$ (因为 $z_1\notin\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ 像集为 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

(2) 类似 (1)

(3) 对于 $z_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $z^2-2zz_0+1=0$ 有两非实根 z_1,z_2. $z_1z_2=1$

若 $|z_1|=|z_2|=1$ $\Rightarrow z_1,z_2$ 共轭 $\Rightarrow z_0=\frac{z_1+z_2}{2}\in\mathbb{R}$, 矛盾

$\Rightarrow$ $|z_1|,|z_2|$ 必有一个在 $(0,1)$ 中, 不妨设为 z_1

$\Rightarrow z_0=\varphi(z_1)$ $\Rightarrow z_0$ 在像集中

对于 $z_0\in\mathbb{R}$, $z^2-2zz_0+1=0$ 若有解 z_1,z_2

若 $|z_0|\le1$, 设 $z_0=\cos\theta$ $\Rightarrow z_1,z_2=e^{\pm i\theta}$, $|z_1|=|z_2|=1$

若 $|z_0|>1$, 方程确有两个非 ±1 的实解

$\Rightarrow$ 像集为 $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$

(4) 类似 (3)

19. $\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-\frac{1}{e^{iz}})=-\frac{1}{2}(ie^{iz}+\frac{1}{ie^{iz}})$

设 $g(z)=ie^{iz}$，则 g 将 $\{-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}z<\frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}z>0\}$ 一一地映到

$\{|z|<1, \mathrm{Im}z>0\}=A$. 只需证明 A 为 φ 的单叶性域且

$\varphi(A)$ 为下半平面. 设 $\{|z|<1, \mathrm{Im}z<0\}=B$，$(-1,0)\cup(0,1)=D$

则由上题知：$\varphi(A)\cup\varphi(B)\cup\varphi(D)=\mathbb{C}\backslash[-1,1]$

而无心圆盘为单叶性域 $\Rightarrow \varphi(A),\varphi(B),\varphi(D)$ 为 $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$ 的划分

$\varphi(D)=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

对于 $z\in A$，$\varphi(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})=\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})\cos\theta+\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})\sin\theta\cdot i$

此时，$\sin\theta>0$，$r-\frac{1}{r}<0$ $\Rightarrow \varphi(z)\in$ 下半平面 $\Rightarrow \varphi(A)\subseteq$ 下半平面

同理 $\varphi(B)\subseteq$ 上半平面　而上半平面、下半平面、$\varphi(D)$ 为 $\mathbb{C}\backslash[-1,1]$

的划分 $\Rightarrow \varphi(A)$ 就是下半平面，证毕

23. $f(z)=\mathrm{Log}(z-1)+\mathrm{Log}(z+1)-\mathrm{Log}(z)$

其支点为 $0,\pm1,\infty$，此时 D 已不含 $0,\pm1,\infty$

只需证明：任一 D 中的闭曲线上 $\Delta f=0$

对于不包含 $0,\pm1,\infty$ 的曲线这是显然的

若包含 $0,\pm1,\infty$ 的一部分，只能是包围 $\{0,1\}$

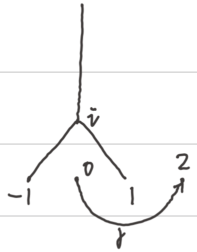
此时 $\Delta\mathrm{Log}(z+1)=0$，$\Delta\mathrm{Log}(z-1)=\Delta\mathrm{Log}z=2\pi i$

$\Rightarrow \Delta f=0+2\pi i-2\pi i=0$，证毕

26. $f(z)=\mathrm{Log}(1-z)+\mathrm{Log}(1+z)$，支点为 $\pm1,\infty$

对于 D 中闭曲线，其不包含任一支点、或它们的组合

$\Rightarrow f$ 在 D 上确有单值分支



我们作曲线γ，$\gamma\subset D$

沿γ连续移动，$\Delta\arg(1+z)=0$

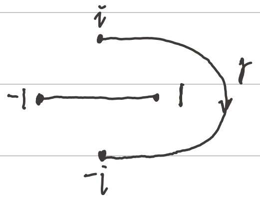
$\Delta\arg(1-z)=\pi$

则 $\Delta\,\mathrm{Im}(\mathrm{Log}(1-z^2)) = \Delta\arg(1+z)+\Delta\arg(1-z) = \pi$

而 $\mathrm{Im}f(0)=0 \Rightarrow \mathrm{Im}f(2)=\pi$

$\Rightarrow f(2)= \ln 3 + \pi i$

27. 由定理2.4.7及简单的几何直观知确有单值分支



沿γ连续移动，$\Delta\arg(1+z) = -\frac{\pi}{2}$

$\Delta\arg(1-z) = -\frac{3}{2}\pi$

$\Rightarrow \Delta\arg\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)} = \dfrac{3\Delta\arg(1-z)+\Delta\arg(1+z)}{4}$

$= -\frac{5}{4}\pi$

$\Rightarrow f(-i) = \sqrt{2}\,e^{\frac{5}{8}\pi i}$（模长没有变）

3.1

1. $\int_\gamma (2-\frac{3}{z})dz = 2\int_\gamma dz - 3\int_\gamma \frac{1}{z}dz$

(1) 此时 $\int_\gamma dz = 2-(-2)=4$，$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_\pi^0 \frac{d(2e^{i\theta})}{2e^{i\theta}} = \int_\pi^0 i\,d\theta = -\pi i$

$\Rightarrow$ 积分值为 $8+3\pi i$

(2) 类似知为 $8-3\pi i$

(3) 用(2)−(3)即得 $-6\pi i$

3. $\int_{|z|=3} \frac{2z-1}{z(z-1)}dz = \int_{|z|=3}\frac{1}{z}dz + \int_{|z|=3}\frac{1}{z-1}dz$

前者已经算过，为$2\pi i$，$\int_{|z|=3}\frac{dz}{z-1} = \int_0^{2\pi}\frac{3ie^{i\theta}}{3e^{i\theta}-1}d\theta = 2\pi i + i\int_0^{2\pi}\frac{1}{3e^{i\theta}-1}d\theta$

下证 $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3e^{i\theta}-1}=0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi}\frac{3e^{-i\theta}-1}{(3e^{i\theta}-1)(3e^{-i\theta}-1)}d\theta=0$

$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi}\frac{3\cos\theta-1-3\sin\theta\cdot i}{10-6\cos\theta}d\theta=0$

由于 $\frac{3\sin\theta}{10-6\cos\theta}+\frac{3\sin(2\pi-\theta)}{10-6\cos(2\pi-\theta)}=0 \Rightarrow$ 虚部积分为0

只需计算 $\int_0^{2\pi}\frac{3\cos\theta-1}{10-6\cos\theta}d\theta=0$，此为三角函数有理表达式

可用万能公式转为有理函数积分，在此不计算

$\Rightarrow \int_{|z|=3}\frac{2z-1}{z(z-1)}dz=4\pi i$

5. $\int_{|z|=r} z^n\bar{z}^k dz=r^{n+k+1}\int_0^{2\pi} ie^{i(n-k+1)\theta}d\theta=\begin{cases}2\pi i\cdot r^{2k} & (n=k-1)\\ 0 & (n\neq k-1)\end{cases}$

8. 由积分的可加性知：$\int_\gamma f(z)g'(z)dz+\int_\gamma f'(z)g(z)dz$

$=\int_\gamma (f'(z)g(z)+f(z)g'(z))dz=\int_\gamma (f(z)g(z))'dz$

因为我们只需证明对于 f 全纯，γ 可求长，则 $\int_\gamma f'(z)dz=f(z)\Big|_a^b$

这里我们假定已经知道 f' 连续

那么由引理3.2.2知：存在折线 p 满足引理中条件

且 $\left|\int_\gamma f'(z)dz-\int_p f'(z)dz\right|<\varepsilon$

此时，$\int_p f'(z)dz=\sum_i\int_{p_i}f'(z)dz$，$p_i$ 为线段

而 $\int_{p_i}f'(z)dz=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum f'(\xi_i)(z_{i+1}-z_i)$，我们由中值定理知：$\exists\,\xi_i$, s.t.

$f'(\xi_i)(z_{i+1}-z_i)=f(z_{i+1})-f(z_i)$（是因为是直线）

$\Rightarrow \int_{p_i}f'(z)dz=f(z_i^1)-f(z_i^2)$（$z_i^1, z_i^2$ 为 p_i 起、终点）

$\Rightarrow \int_p f'(z)dz=f(z)\Big|_a^b$，由 ε 任意性知 $\int_\gamma f'(z)dz=f(z)\Big|_a^b$

11、(1) 设 $M(r)=\sup\limits_{|z-z_0|=r}|f(z_0)-f(z)|$

由 f 在 z_0 连续 知 $\lim\limits_{r\to 0}M(r)=0$

此时 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)]d\theta \le \lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi M(r)=\lim\limits_{r\to 0}M(r)=0$

证毕

(2) 做 $z=z_0+re^{i\theta}$ 代换即变成(1)

13. $f(z)=f(a)+\frac{\partial f}{\partial z}(a)(z-a)+\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a)(\bar z-\bar a)+o|z-a|$

$\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}f(z)dz=\frac{1}{\pi r^2}\Big(\int_{|z-a|=r}f(a)dz+\int_{|z-a|=r}\frac{\partial f}{\partial z}(a)(z-a)dz$

$+\int_{|z-a|=r}\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a)(\bar z-\bar a)dz+\int_{|z-a|=r}o|z-a|dz\Big)$

前两者为0（即 $\int_{|z-a|=r}1dz=\int_{|z-a|=r}(z-a)dz=0$）

$\int_{|z-a|=r}(\bar z-\bar a)dz=2\pi i\cdot r^2$

而 $\left|\int_{|z-a|=r}o|z-a|dz\right|\le\int_{|z-a|=r}o(r)|dz|=2\pi r\,o(r)$

$\Rightarrow \lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z-a|=r}f(z)dz=2i\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a)$

由此易知结论成立