复分析第一次习题课

黄天一

2023 年 3 月 17 日

1 习题讲解

1.1 作业部分

1.1.5. 设 $|a|<1$, 证明: 若 $|z|=1$, 则 $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|=1$.

证明. 直接计算可得

$$|z-a|^2=|z|^2-2z\bar{a}-2\bar{z}a+|a|^2=1-2z\bar{a}-2\bar{z}a+|a|^2|z|^2=|1-\bar{a}z|^2.$$

□

1.1.6. 设 $|a|<1, |z|<1$, 证明:

(1) $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|<1$.

(2) $1-\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\dfrac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}$.

(3) $\dfrac{||z|-|a||}{1-|a||z|}\leqslant\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|\leqslant\dfrac{|z|+|a|}{1+|a||z|}$.

证明. (1-2) 直接证明 (2), (1) 是推论. 计算可得

$$1-\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\frac{(1-\bar{a}z-a\bar{z}+|a|^2|z|^2)-(|z|^2-\bar{a}z-a\bar{z}+|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}.$$

(3) 考虑函数 $f(t)=\dfrac{\alpha+t}{\beta+t}$, 其中 $\alpha<\beta$. 则当 $t>\max\{-\alpha,-\beta\}$ 时, $f(t)$ 是单调递增的 (糖水不等式). 结合 $|z|^2+|a|^2<1+|a|^2|z|^2$ 可得

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\frac{|z|^2+|a|^2-\bar{a}z-a\bar{z}}{1+|a|^2|z|^2-\bar{a}z-a\bar{z}}\leqslant\frac{|z|^2+|a|^2+2|a||z|}{1+|a|^2|z|^2+2|a||z|}=\left(\frac{|z|+|a|}{1+|a||z|}\right)^2.$$

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\frac{|z|^2+|a|^2-\bar{a}z-a\bar{z}}{1+|a|^2|z|^2-\bar{a}z-a\bar{z}}\geqslant\frac{|z|^2+|a|^2-2|a||z|}{1+|a|^2|z|^2-2|a||z|}=\left(\frac{|z|-|a|}{1-|a||z|}\right)^2.$$

□

1.2.14. 设 L 是由方程 $az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0$ 所确定点的轨迹, 其中 $a,d\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{C}$. 证明:

(1) $a=0$, $\beta\neq0$ 时, L 是直线.

(2) $a\neq0$, $|\beta|^2-ad>0$ 时, L 是一个圆周, 并求出它的圆心和半径.

证明. (1) 此时 L 方程为 $\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0$. 将 $z=x+\mathrm{i}y,\beta=a+\mathrm{i}b$ 代入可得在实坐标下 L 方程为 $ax+by+d=0$, 为直线.

(2) 此时 L 的方程可整理为

$$L:\left|z+\frac{\beta}{a}\right|^2=\frac{|\beta|^2-ad}{a^2}.$$

所以 L 是一个圆周, 圆心为 $-\dfrac{\beta}{a}$, 半径为 $\dfrac{\sqrt{|\beta|^2-ad}}{|a|}$.

□

1.2.15. 设 $z_1\neq z_2$, $0<\lambda\neq1$, 证明由方程 $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda$ 所确定的点 z 的轨迹是一圆周 (称为 Apollonius 圆), 求该圆周的圆心 a 和半径 R. $\lambda=1$ 时它的轨迹是什么?

证明. 整理该方程可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda&\Leftrightarrow|z-z_1|^2=\lambda^2|z-z_2|^2\\&\Leftrightarrow(1-\lambda^2)z\bar{z}+(\lambda^2\bar{z}_2-\bar{z}_1)z+(\lambda^2z_2-z_1)\bar{z}+|z_1|^2-\lambda^2|z_2|^2=0.\end{aligned}$$

此时 $a=1-\lambda^2\neq0$, $\beta=\lambda^2z_2-z_1$, $d=|z_1|^2-\lambda^2|z_2|^2$. 验证可得

$$\begin{aligned}|\beta|^2-ad&=(\lambda^4|z_2|^2+|z_1|^2-\lambda^2z_2\bar{z}_1-\lambda^2\bar{z}_2z_1)-(1-\lambda^2)(|z_1|^2-\lambda^2|z_2|^2)\\&=\lambda^2(|z_1|^2+|z_2|^2-z_2\bar{z}_1-\bar{z}_2z_1)=\lambda^2|z_1-z_2|^2>0.\end{aligned}$$

所以由方程 $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda$ 确定的点的轨迹是一圆周, 圆心为 $\dfrac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}$, 半径为 $\dfrac{\lambda|z_2-z_2|}{1-\lambda^2}$.

若 $\lambda=1$, 则轨迹为 z_1z_2 连线的中垂线. □

下面的球面表示均默认为北极投影. 回忆北极投影 $\pi:\mathbb{S}^2\setminus\{N\}\to\mathbb{C}$ 为

$$(x_1,x_2,x_3)\mapsto\frac{x_1+\mathrm{i}x_2}{1-x_3},$$

逆映射为

$$z\mapsto\left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2},\frac{z-\bar{z}}{\mathrm{i}(1+|z|^2)},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right).$$

1.3.1. 证明: 在复数的球面表示下, z 和 $\dfrac{1}{\bar{z}}$ 的球面像关于复平面对称.

证明. 计算 $\frac{1}{\bar z}$ 的球面像坐标为

$$x_1=\frac{\frac{1}{\bar z}+\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{|z|^2}}=\frac{z+\bar z}{|z|^2+1},\ x_2=\frac{\frac{1}{\bar z}-\frac{1}{z}}{\mathrm{i}(1+\frac{1}{|z|^2})}=\frac{z-\bar z}{\mathrm{i}(|z|^2+1)},\ x_3=\frac{\frac{1}{|z|^2}-1}{\frac{1}{|z|^2}+1}=\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}.$$

比较可得 z 与 $\frac{1}{\bar z}$ 的球面像关于复平面对称. □

1.3.2. 证明: 在复数的球面表示下, z 和 w 的球面像是对径点当且仅当 $z\bar w=-1$.

证明. 若 $z\bar w=-1$, 则 $-w=\frac{1}{\bar z}$, 由上题结论可得 z 与 $-w$ 的球面像关于复平面对称, 而 w 与 $-w$ 的球面像的竖坐标相等, 其余坐标相差一个负号, 所以 z 与 w 的球面像是对径点.

若 z 和 w 的球面像是对径点, 由于球极投影是从 $\mathbb{S}^2\setminus\{N\}$ 到 $\mathbb{C}$ 的一一映射, 而由前面讨论可得 $-\frac{1}{\bar z}$ 的球面像与 z 的球面像是对径点, 所以 $w=-\frac{1}{\bar z}\Rightarrow z\bar w=-1$. □

1.7.3. 证明: 若 E 是紧集, f 在 E 上连续, 则 $f(E)$ 也是紧集. 将紧集换成闭集, 结论是否成立?

证明. 用 Heine-Borel 性质: 任取 $f(E)$ 的开覆盖 $\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, 由 $\{f^{-1}(U_\alpha):\alpha\in\Lambda\}$ 是 E 的开覆盖, 由 E 紧可得它存在有限子覆盖 $\{f^{-1}(U_{\alpha_i}):i=1,\cdots,N\}$, 从而 $\{U_{\alpha_i}:i=1,\cdots,N\}$ 是 $f(E)$ 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的有限子覆盖.

用有界闭性质: 由定理 1.7.1(2) 可得有界性. 任取 $f(E)$ 中的 Cauchy 列 $w_n=f(z_n)$, 其中 $z_n\in E$. 由 E 紧致可得 $\{z_n\}$ 存在收敛于 E 的子列 $\{z_{n_k}\}$, 设其极限为 $z_0\in E$, 再由 f 连续可得 $w_{n_k}=f(z_{n_k})\to f(z_0)\in f(E)$, 结合 w_n 本身是 Cauchy 列可得 $w_n\to f(z_0)\in f(E)$, 所以 $f(E)$ 闭.

改为闭集不成立, 反例很多, 这里给一个: 设 $E=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z\geqslant 0\}$ 为右半平面, $f(z)\triangleq\frac{1}{|z|+1}$, 则 E 是闭集, f 在 E 上连续, 但 $f(E)=(0,1]$ 不是闭集. □

1.7.5. 证明: 若 $f:D\to\mathbb{C}$ 在区域 D 上一致连续, 则对任意 $z_0\in\partial D$, $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 存在.

证明. 任取 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对任意满足 $|z_1-z_2|<\delta$ 的 $z_1,z_2\in D$, 都有 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$. 由此可得任取 $z_1,z_2\in B(z_0,\frac{\delta}{2})\cap D$, 有 $|z_1-z_2|<\delta$, 从而 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$. 由函数的 Cauchy 收敛准则可得 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 收敛. □

2.1.1. 研究下列函数的可微性.

(1) $f(z)=|z|$.

解答. 用定义: 在 $z_0=0$ 处, $\dfrac{f(z)-f(0)}{z}=\dfrac{|z|}{z}$. 当 z 取正实数时上式为 1, 取负实数时上式为 -1, 所以 f 在 0 处不可微; 在 $z_0\neq 0$ 处, 设 $z_0=r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$. 我们考虑两种情况:

(1) $z=r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta\to\theta_0$. 此时 $f(z)-f(z_0)=0$.

(2) $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$, $r\to r_0$. 此时

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{r-r_0}{(r-r_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}$$

为非零常数, 所以 f 在 $z_0\neq 0$ 处也不可微.

用 C-R 方程: $f=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}$, 在 $z=0$ 处不是实可微的, 进而不是复可微的. $z\neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{z}{2\sqrt{z\bar{z}}}=\frac{z}{2|z|}\neq 0.$$

所以 f 不是复可微的. □

(2) $f(z)=|z|^2$.

解答. 用定义: 整理可得

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{z_0}=\frac{|h|^2+\bar{z}_0h+z_0\bar{h}}{h}=\bar{h}+\bar{z}_0+z_0\frac{\bar{h}}{h}.$$

若 $z_0=0$, 上式在 $h\to 0$ 时收敛于 0, 所以 f 在 0 处复可微, 导数为 0. 若 $z_0\neq 0$, h 沿实轴逼近时上式收敛于 $\bar{z}_0+z_0$, h 沿虚轴逼近时上式收敛于 $\bar{z}_0-z_0$, 二者不相等, 所以 f 在 $z_0\neq 0$ 处不是复可微的.

用 C-R 方程: 首先 $f=x^2+y^2$ 处处实可微. 由 $f=z\bar{z}$ 可得 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=z$, 故 f 在 $z=0$ 处复可微 (导数为 0), 其他点处不是复可微的. □

(3) $f(z)=\operatorname{Re} z$.

解答. 用定义: $\forall z\in\mathbb{C}$, 此时 $\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}=\dfrac{\operatorname{Re} h}{h}$. 若 $h\in\mathbb{R}$, 则 $\dfrac{\operatorname{Re} h}{h}=1$, 若 $h\in \mathrm{i}\mathbb{R}$, 则 $\dfrac{\operatorname{Re} h}{h}=0$. 所以极限不存在, $f(z)$ 处处不可微.

用 C-R 方程: 实可微显然, 由 $f=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ 可得 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\dfrac{1}{2}\neq 0$, 所以处处不是复可微的. □

(4) $f(z)=\arg z$.

解答. 定义域为 $z\neq 0$. 设 $z_0=r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\neq 0(-\pi<\theta_0\leqslant\pi)$, 考虑两种情况:

1. $z=r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(-\pi<\theta\leqslant\pi)$, $\theta\to\theta_0$. 此时

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\theta-\theta_0}{r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta_0)}-1)}\to\frac{1}{\mathrm{i}z_0},\ \text{as } \theta\to\theta_0.$$

(最后一步可以把 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta_0)}$ 分解为实虚部, 然后等价无穷小).

2. $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$, $r\to r_0$. 此时 $f(z)-f(z_0)\equiv 0$.

综上可得 $f(z)=\arg z$ 在 $z_0\neq 0$ 处不可微. □

(5) $f(z)$ 为常数.

解答. 此时 $\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}\equiv 0$, 所以 f 处处可微, $f'(z)=0$. □

2.1.4. 设区域 G 和区域 D 关于实轴对称. 证明: 如果 $f(z)$ 是 D 上的全纯函数, 那么 $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ 是 G 上的全纯函数.

证明. 直接计算可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{f(\bar{z}+\bar{h})}-\overline{f(\bar{z})}}{h}=\lim_{h\to 0}\overline{\left(\frac{f(\bar{z}+\bar{h})-f(\bar{z})}{\bar{h}}\right)}=\overline{f'(\bar{z})}.$$

最后一步由 $z\mapsto\bar{z}$ 的连续性可得. □

上面这个习题是证明 Schwarz 对称定理的基本引理之一.

1.2 补充习题

以下补充题目均标明了来源, 具体题目可能略有改动.

1. (Stein 1.7(b)) 我们用 $\mathbb{D}$ 表示复平面上的单位开圆盘. 对于固定的 $a\in\mathbb{D}$, 证明: $\mathbb{D}$ 上的映射

$$F: z\mapsto\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$$

是 $\mathbb{D}$ 上的全纯自同构.

证明. 由作业 1.1.6(1) 可得 $|F(z)|<1$, $\forall z\in\mathbb{D}$, 这说明 F 是从 $\mathbb{D}$ 到自身的映射. 由 $|a|<1$ 可得 F 在 $\mathbb{D}$ 内全纯.

然后先证明 F 是满射. 事实上, 计算可得

$$F(F(z))=\frac{a-F(z)}{1-\bar{a}F(z)}=\frac{a-\frac{a-z}{1-\bar{a}z}}{1-\bar{a}\frac{a-z}{1-\bar{a}z}}=\frac{z(1-|a|^2)}{1-|a|^2}=z.$$

然后证单射. 设 $F(w)=F(w')$, 由 F 满可设 $w=F(z)$, 于是 $z=F(F(z))=F(w)=F(w')$, 进而 $w=F(F(w'))=w'$, 即证. □

上面这题本身是很简单的, 但是它的背后其实有一个很漂亮的结论. 在 4.5 节, 我们将用 Schwarz(洗袜子) 引理证明: $\mathbb{D}$ 上的全纯自同构一定和 F 的形式 “差不多”, 有这样的结论:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D})=\left\{z\mapsto e^{i\theta}\frac{a-z}{1-\bar{a}z}:\theta\in\mathbb{R},a\in\mathbb{D}\right\}.$$

下面这一题是为补充内容第一节作的预备工作.

2. (史济怀 1.3.3) 证明: 在球极投影下, $\mathbb{C}_\infty$ 中点 z,w 的球面像直线距离为

$$\rho(z,w)=\frac{2|z-w|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}}.$$

证明. 设 z,w 的球面像分别为 $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)$. 先设 $z,w\neq\infty$. 则

$$\rho(z,w)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}=\sqrt{2(1-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)}.$$

代入球面像公式可得

$$\begin{aligned}x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3&=\frac{(z+\bar z)(w+\bar w)-(z-\bar z)(w-\bar w)+(|z|^2-1)(|w|^2-1)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}\\&=\frac{(|z|^2-1)(|w|^2-1)+2(z\bar w+\bar z w)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}\end{aligned}$$

代回即可得

$$\rho(z,w)=2\sqrt{\frac{|z|^2+|w|^2-z\bar w-\bar z w}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}}=\frac{2|z-w|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}}.$$

若 z,w 一者为 ∞, 容易验证结论成立. □

3. (复习连通性, 不属于复变范畴的习题) 证明: “拓扑学家的正弦曲线”

$$E=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right):0<x\leqslant 1\right\}\cup\{(0,y):-1\leqslant y\leqslant 1\}\triangleq A\cup B$$

是连通而非道路连通的.

回顾. 这里我们应用点集拓扑里的一般定义, 它与教材里的定义是等价的. 称拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 是连通的, 是指不存在 X 的非空不交开子集 U,V, 使得 $X=U\cup V$. 或者等价地, X 不存在非空的既开又闭真子集. 称 $A\subset X$ 是连通子集, 是指 A 在子空间拓扑下成为连通空间.

证明. 为了证明连通性, 我们先证明一般拓扑意义下的一个引理:

引理. 设 X 为拓扑空间. 若 $E\subset X$ 为连通子集, 则 $\overline{E}$ 也是连通子集.

证明. 设 U 是 $\overline{E}$ 非空的既开又闭子集 (从而是全空间 X 的闭集), 由于 E 在 $\overline{E}$ 中稠密, 故 $E\cap U$ 是 E 的非空既开又闭子集, 由 E 连通可得 $E\cap U=E\Rightarrow E\subset U$, 即 U 是包含 E 的闭集, 因此 $\overline{E}\subset U$, 即 U 只能为 $\overline{E}$. 所以 $\overline{E}$ 是连通的.

回到原题证明. 不难验证 $E=\overline{A}$, 而 A 作为连续函数图像是连通的, 所以 $E=\overline{A}$ 连通.

然后证明 E 非道路连通. 假设不然, 则存在连接 $(0,0)$ 与 $(\frac{2}{\pi},1)$ 的连续道路 $\gamma:[0,1]\to E$, $t\mapsto(x(t),y(t))$. 选取 $t_0=1$, 则 $y(t_0)=1$. 由连续函数的介值性, 可以选取 $0<t_0<t_1$ 使得 $x(t_1)=\frac{2}{3\pi}$, 则 $y(t_1)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$. 再选取 $0<t_2<t_1$, 使得 $x(t_2)=\frac{2}{5\pi}$, 则 $y(t_2)=1$. 以此类推, 可以得到数列 t_k, 对应 $y(t_k)=(-1)^k$. 注意到 $\{t_k\}$ 是严格递减有下界 0 的, 所以存在极限 $t_0\geqslant 0$. 由于 $y(\cdot)$ 是连续函数, 故 $y(t_k)$ 为 Cauchy 列, 这与 $y(t_k)=(-1)^k$ 矛盾. 所以 E 不是道路连通的. □

3. (Stein 1.8, 史济怀 2.1.3 是其推论) 设 U, V 为复平面上的有交开集. 证明复变函数的链式法则: 若 $f = f : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z, \bar{z})$, $g : V \to \mathbb{C}$, $w \mapsto g(w, \bar{w})$ 是可微的, 设 $h = g \circ f : U \cap V \to \mathbb{C}$, 则

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \left(\frac{\partial g}{\partial w} \circ f\right) \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \circ f\right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \ \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial g}{\partial w} \circ f\right) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \circ f\right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}.$$

由此给出全纯函数的链式法则.

复平面上的外微分算子. 这一题当然可以按照 $\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 的定义直接硬算, 这里我给出一个借助复平面上的外微分算子 d 的简单证法. 首先简要介绍 $\mathbb{C}$ 上的外微分算子 d. 由 $z = x + \mathrm{i}y, \bar{z} = x - \mathrm{i}y$ 可得

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y, \ \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}\bar{z}}{2}, \ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}\bar{z}}{2\mathrm{i}}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) \frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}\bar{z}}{2} + i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) \frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}\bar{z}}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}.
\end{aligned}$$

[1]我们引入 1-形式值算子 $\partial \triangleq \dfrac{\partial}{\partial z}\mathrm{d}z$, $\bar{\partial} \triangleq \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}$, 则上式可以写为

$$\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}.$$

∂ 和 $\bar{\partial}$ 是标准记号, 在其他课程中讨论具有复结构的流形或曲面时总会出现. 它们有如下简单性质:

$$\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0.$$

这是 Poincaré 等式 $\mathrm{d}^2 = 0$ 的直接推论[2].

证明. 设 $w = f(z)$, 则

$$\mathrm{d}w = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}.$$

---

[1]也可以高射炮打蚊子: 由于 $(z, \bar{z})$ 构成复平面的另一个坐标, 由于外微分算子的形式不变性, 此式立得.

[2]对于一般的函数 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, 仍然可以定义类似的记号. 设 $(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$ 为标准坐标, $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k, \bar{z}_k = x_k - \mathrm{i}y_k$. 定义

$$\partial \triangleq \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k}\mathrm{d}z_k, \ \bar{\partial} \triangleq \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\mathrm{d}\bar{z}_k.$$

则可以验证完全类似的结论:

$$\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}, \ \partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0.$$

$$\mathrm{d}\bar{w}=\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}h&=\frac{\partial g}{\partial w}(w,\bar{w})\mathrm{d}w+\frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(w,\bar{w})\mathrm{d}\bar{w}\\&=\left(\frac{\partial g}{\partial w}\circ f\right)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right)+\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{w}}\circ f\right)\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right)\\&=\left[\left(\frac{\partial g}{\partial w}\circ f\right)\frac{\partial f}{\partial z}+\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{w}}\circ f\right)\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right]\mathrm{d}z+\left[\left(\frac{\partial g}{\partial w}\circ f\right)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}+\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{w}}\circ f\right)\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right]\mathrm{d}\bar{z}.\end{aligned}$$

结合 $\mathrm{d}h=\dfrac{\partial h}{\partial z}\mathrm{d}z+\dfrac{\partial h}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}z$, 比对 $\mathrm{d}z,\mathrm{d}\bar{z}$ 的系数即证. □

下面我们给两个实际的例子, 帮同学们熟悉复微分算子的计算.

4. 以下 D,Ω 均为 $\mathbb{C}$ 中的区域.

(1) (史济怀 2.2.8) 设 $f\in H(D)$, 证明: 对任意 $p\geqslant 2$, 都有

$$\Delta(|f(z)|^p)=p^2|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2.$$

(2) (史济怀 2.2.14) 设 $u\in C^2(\Omega)$, $f\in H(D)$, 并且 $f(D)\subset\Omega$. 证明: $\Delta(u\circ f)=(\Delta u\circ f)|f'|^2$.

证明. (1) 由调和算子的复微分形式可得

$$\begin{aligned}\Delta(|f(z)|^p)&=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}(f(z)\overline{f(z)})^{\frac{p}{2}}\\&=2p\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\bar{f}+f\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)(f\bar{f})^{\frac{p}{2}-1}\\&=2p\frac{\partial}{\partial z}(f\overline{f'}(f\bar{f})^{\frac{p}{2}-1})\\&=2p|f'|^2|f|^{p-2}+2p\left(\frac{p}{2}-1\right)(f\overline{f'})f'\bar{f}|f|^{p-4}\\&=p^2|f|^{p-2}|f'|^2.\end{aligned}$$

从这个式子出发可以得到一个很有意思的结论. 在上学期的微分方程学习中我们知道了: 在有界区域 D 上次调和函数 (即满足 $\Delta u\geqslant 0$ 的函数) 满足强最大值原理, 即 u 的最大值不可能在 D 内部取到, 除非 u 是常数. 根据本题的结论, 我们知道 $|f(z)|^p(p\geqslant 2)$ 是次调和函数, 若 $|f(z)|$ 非常值 (其实这就等价于 f 非常值), 则 $|f(z)|^p$ 的最大值只能在边界 ∂D 上取到, 进而 $|f(z)|$ 的最大值只能在 ∂D 上取到. 这就是全纯函数的**最大模原理**. 在 4.5 节, 我们将用全纯映射是开映射这一性质来证明最大模原理.

(2) 利用复微分的链式法则, 计算可得

$$\begin{aligned}\Delta(u\circ f) &= 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}(u\circ f) = 4\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\circ f\right)\frac{\partial f}{\partial\bar z}+\left(\frac{\partial u}{\partial\bar z}\circ f\right)\frac{\partial\bar f}{\partial\bar z}\right]\\ &= 4\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\bar z}\circ f\right)\frac{\partial\bar f}{\partial\bar z}\right] = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial\bar z}\circ f\right)\frac{\partial\bar f}{\partial\bar z}\\ &= 4\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar z}\circ f\right)\frac{\partial f}{\partial z}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\bar z^2}\circ f\right)\frac{\partial f}{\partial\bar z}\right]\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}\\ &= (\Delta u\circ f)|f'|^2.\end{aligned}$$

这个结论告诉我们: 若 u 在 Ω 上调和 (resp. 次调和), 则它复合一个全纯映射 $u\circ f$ 也是调和 (resp. 次调和) 的. 这样 $u\circ f$ 同样保持一些良好的性质, 例如最大值原理, 平均值公式等.

□

5. (Ahlfors 2.1.2 正文, 史济怀 2.2.18, 介绍性题目, 无需掌握) 证明: 若 $u(x,y)$ 是关于 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 的实调和多项式, 则

$$f(z)=2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2\mathrm{i}}\right)-u(0,0)$$

是整函数, 并且对任意 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}f(z)=u(x,y)$.

我们先简要介绍这个 $f(z)$ 是如何凑出来的. 我们知道, 从单连通区域 D 上的实调和函数 u 出发, 可以通过构造积分

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

得到 u 的共轭调和函数 v, 从而构造以 u 为实部的全纯函数 $f=u+\mathrm{i}v$. 那么有没有不用积分, 而是显式构造以 u 为实部的全纯函数的方法呢? Ahlfors 在他的复分析 2.1.2 节提到了这样一个方法.

我们设全纯函数 f 以调和函数 u 为实部, 定义域为单连通区域. 注意到

$$\frac{\partial\bar f}{\partial z}=\overline{\frac{\partial f}{\partial\bar z}}=0.$$

因此 $\bar f(z)$ 只与 $\bar z$ 有关, 设 $\bar f(z)=g(\bar z)$. 这时

$$u(x,y)=\frac{f(x+\mathrm{i}y)+\overline{f(x+\mathrm{i}y)}}{2}=\frac{f(x+\mathrm{i}y)+g(x-\mathrm{i}y)}{2}.$$

为了形式上解出 f, 我们代入 $x=\dfrac{z}{2}, y=\dfrac{z}{2\mathrm{i}}$, 可得

$$u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2\mathrm{i}}\right)=\frac{f(z)+g(0)}{2}=\frac{f(z)+\overline{f(0)}}{2}.$$

由于所需要确定的 f 可以相差一个纯虚数常数, 不妨设 $f(0)\in\mathbb{R}$, 由此可得 $f(0)=u(0,0)$, 所以

$$f(z)=2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2\mathrm{i}}\right)-u(0,0).$$

这就从形式上确定了 f. 史济怀上的习题 2.2.18 实际上就是对于 u 是调和多项式的情况严格说明了这样定义的 f 确实是以 u 为实部的全纯函数, 现在我们给出详细证明.

证明. 全纯性是显然的, 下面证明 $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)$. 设

$$u(x,y)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{jk}x^jy^k,\ a_{jk}\in\mathbb{R}.$$

代入 $x=\dfrac{z+\bar z}{2}$, $y=\dfrac{z-\bar z}{2\mathrm{i}}$ 可得

$$u\left(\frac{z+\bar z}{2},\frac{z-\bar z}{2\mathrm{i}}\right)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{jk}\left(\frac{z+\bar z}{2}\right)^j\left(\frac{z-\bar z}{2\mathrm{i}}\right)^k\triangleq u(0,0)+u_1(z)+u_2(\bar z)+u_3(z,\bar z).$$

其中, $u(0,0)=a_{00}$ 为常数项, $u_1(z)$ 是仅与 z 有关的多项式 (从而全纯), $u_2(\bar z)$ 是仅与 $\bar z$ 有关的多项式, $u_3(z,\bar z)$ 是每项都与 $z,\bar z$ 有关的多项式. 由展开式可得

$$u_1(z)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{jk}\left(\frac{z}{2}\right)^j\left(\frac{z}{2\mathrm{i}}\right)^k-u(0,0).$$

$$u_2(\bar z)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{jk}\left(\frac{\bar z}{2}\right)^j\left(\frac{\bar z}{\overline{2\mathrm{i}}}\right)^k-u(0,0).$$

$$u_3(z,\bar z)=\sum_{j,k=1}^{m+n}b_{jk}z^j\bar z^k.$$

其中 b_{jk} 为一些实系数. 首先由 u_1,u_2 的形式可得 $u_2(\bar z)=\overline{u_1(z)}$. 由于 u 是调和函数, 所以

$$0=\frac{\partial^2u}{\partial z\partial\bar z}=\frac{\partial^2u_3}{\partial z\partial\bar z}=\sum_{j,k=1}^{m+n}jkb_{jk}z^{j-1}\bar z^{k-1}.$$

这说明 $jkb_{jk}=0\Rightarrow b_{jk}=0,\forall 1\leqslant j,k\leqslant m+n$, 所以 u_3 恒为零. 因此

$$u(x,y)=u(0,0)+u_1(z)+\overline{u_1(z)}.$$

由 $u_1(z)$ 的定义式可得

$$u_1(z)=u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2\mathrm{i}}\right)-u(0,0)=\frac{f(z)-u(0,0)}{2}.$$

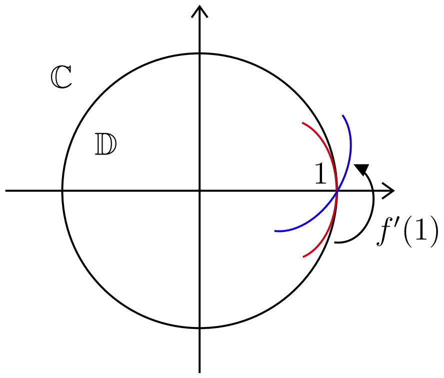
代回即可得

$$u(x,y)=\frac{f(z)+\overline{f(z)}}{2}=\operatorname{Re} f(z).$$

□

6. (史济怀 2.3.3) 设 f 在 $\mathbb{D}\cup\{1\}$ 上全纯, 并且 $f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$, $f(1)=1$. 证明: $f'(1)\geqslant 0$.

分析. 先从几何直观考虑. 我们考虑 $f'(1)\neq 0$ 的情况, 此时 $f'(1)$ 是保角的. 如果 $\arg f'(1)\neq 0$, 那么它就会将过点 1 处的曲线旋转一定角度. 如图所示, 我们取一段包含在 $\mathbb{D}$ 内 “足够竖直” 的圆弧, 与 $\mathbb{D}$ 的切点为 1. 此时在 f 的作用下, 这段圆弧被旋转了一定角度, 跑到了 $\mathbb{D}$ 外面. 但 $f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$, $\mathbb{D}$ 内的弧线段在作用后仍应该位于圆盘内, 这就导出了矛盾. 下面我们给出严格的证明.



证明. 由 f 在 $z=1$ 处全纯可得, 在 $z=1$ 附近成立

$$f(z)=f(1)+f'(1)(z-1)+o(|z-1|)=1+f'(1)(z-1)+o(|z-1|),\ |z|<1.$$

由 $f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$ 可得 $|f(z)|<1$, 因此

$$1>|f(z)|^2=1+2\operatorname{Re}(f'(1)(z-1))+o(|z-1|).$$

设 $z-1=re^{i\theta}$, 则有

$$\operatorname{Re}(f'(1)\cdot re^{i\theta})+o(r)<0.$$

这里 θ 的取值范围是 $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$. 令 $r\to 1$, 即可得

$$\operatorname{Re}(f'(1)e^{i\theta})\leqslant 0,\ \forall\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right).$$

设 $\varphi=\arg f'(1)$, 则 $\cos(\varphi+\theta)\leqslant 0$, $\forall\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$, 由此即可得 $\varphi=0$, 因此 $f'(1)=|f'(1)|\geqslant 0$. $\square$

2 补充内容

本次习题课的补充内容都是介绍性的, 了解即可.

2.1 关于 Riemann 球面的进一步讨论

我们从扩充复平面谈起. 在复分析的学习中, 无穷远点这一概念常常会出现. 例如它可以作为某些复变函数的孤立奇点. 但是, 我们对复变函数的分析是建立在良好的度量与拓扑结构上的, 如果仅仅把 ∞ 生硬地加入复平面这个家, 这时我们很难展开对这样一个朴素集合 $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 的分析. 而这时 Riemann 球面与球极投影就帮了我们的大忙. 阅读本节需要一丢丢点集拓扑的基础 (很简单的基础! 如果有同学不了解可以问问 chatgpt).

回顾一类常用的构造拓扑[3]的方法: 设 $(X, \mathcal{T}_X)$ 为拓扑空间, Y 为非空集合, $f: X \to Y$ 为一个映射. 则 Y 上可以定义如下拓扑[4]:

$$\mathcal{T}_Y = \{U \subset Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}.$$

现在我们来看北极投影 $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{S}^2$ 上自带一个子空间拓扑, 所以我们可以把球面拓扑通过一一映射 π 移植在 $\mathbb{C}_\infty$ 上, 这样 $\mathbb{C}_\infty$ 就有了余诱导拓扑 $\mathcal{T}_\pi$.

这个拓扑结构是不是足够 “好” 的呢? 我们需要验证: $\mathbb{C}$ 上由度量给出的拓扑就等于它作为 $\mathbb{C}_\infty$ 的子空间继承而来的拓扑. 这一点是容易验证的, 因为 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ 同胚, 同胚映射即为球极投影. 另一方面, 可以验证球极投影将球面上的圆周映为 $\mathbb{C}$ 上的圆周, 我们可以看到, 球极投影把北极点附近的一个小球冠映成了区域 $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| \geqslant R\}$, 所以该区域就是 ∞ 的一个邻域. 注意到球面 $\mathbb{S}^2$ 是紧致的, 所以 $\mathbb{C}_\infty \cong \mathbb{S}^2$ 也是紧致的. 这是一个有趣的发现: 我们给无穷平面新加一个点, 竟然获得了紧致的拓扑空间! 实际上, 这个操作是可以一般化的, 拓扑学上称之为**一点紧致化**[5].

下面, 我们给出 $\mathbb{C}_\infty$ 上的度量 ρ. 实际上我们早就给出来了, 正是补充习题第 2 题, 即

$$\rho(z, w) \triangleq |\pi(z) - \pi(w)| = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}}.$$

我们来验证上式确实是一个度量.

1. 正定性: 非负显然. 若 $\rho(z, w) = 0$, 则 $\pi(z) = \pi(w)$, 从而 $z = w$.

2. 对称性显然.

3. 三角不等式: 任取 $z, w, \zeta \in \mathbb{C}_\infty$, 则

$$\rho(z, \zeta) = |\pi(z) - \pi(\zeta)| \leqslant |\pi(z) - \pi(w)| + |\pi(w) - \pi(\zeta)| = \rho(z, w) + \rho(w, \zeta).$$

[3]为了节省篇幅, 讲义中省略了一些定义, 例如拓扑、度量等.

[4]这个拓扑有个名字, 叫**余诱导拓扑** (co-induced topology), 它是 Y 上使得 f 连续的最强拓扑.

[5]设 $(X, \mathcal{T})$ 是不紧致的 Hausdorff 空间, 元素 $\omega \notin X$. 定义 $X_* = X \cup \{\omega\}$, 以及 X_* 的子集族

$$\mathcal{T}_* = \mathcal{T} \cup \{X_*\} \cup \{X_* \setminus K : K \text{ 是 } X \text{ 的紧致子集}\}.$$

可以验证: (1) $(X_*, \mathcal{T}_*)$ 是紧致拓扑空间; (2) $\mathcal{T}_*$ 在 X 上诱导的子空间拓扑就等于 $\mathcal{T}$. 称 $(X_*, \mathcal{T}_*)$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 的一点紧致化. 例如, $\mathbb{C}_\infty \cong \mathbb{S}^2$ 即为 $\mathbb{C}$ 的一点紧致化; 更一般地, $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ 同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的一点紧致化.

可以看到, ρ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上诱导的拓扑 $\mathcal{T}_\rho$ 和余诱导拓扑 $\mathcal{T}_\pi$ 都是通过球极投影把球面上的度量拓扑移植到扩充复平面上, 所以二者定义了相同的拓扑. 一个直接的推论是: $(\mathbb{C}_\infty, \rho)$ 是紧致度量空间, 所以是完备的. 而我们注意到, 在这个度量下 $\rho(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}$, 所以 ∞ 所在的开球必然形如 $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| \geqslant R\}$, 这也解释了在一些复分析教材上 $B(\infty, R)$ 的定义.

(下面是关于黎曼曲面的一点介绍, 可以不看) 上面我们谈论了球极投影对于扩充复平面的意义, 它把球面上的拓扑结构和度量结构移植到了 $\mathbb{C}_\infty$ 上. 反过来, 球极投影实际上也给出了球面 $\mathbb{S}^2$ 上的复结构. 设 $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$(这里 N 为北极点, S 为南极点), 则 $\{U, V\}$ 给出了 $\mathbb{S}^2$ 的开覆盖. 通过北极与南极对应的球极投影, 我们知道 U, V 都同胚于 $\mathbb{C}$, 这就说明球面在局部可以等同于 $\mathbb{C}$ 上的开集. 若记 π 为北极投影, p 为南极投影, 我们称 (U, π), (V, p) 是球面上的**复坐标**. 计算可得 $\pi^{-1} \circ p = \frac{1}{z} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, 为全纯映射, 这时我们称这两个复坐标是相容的, 构成 $\mathbb{S}^2$ 上的**复图册** (complex atlas). 这个复图册实际就给出了球面上的复结构, 此时球面成为一个**黎曼曲面** (满足一些良好的拓扑性质[6], 又存在一个复图册). 这样, 我们就可以把复分析里一些手法用于球面等黎曼曲面上的研究, 而不仅限于复平面.

2.2 关于全纯映射几何意义的一些补充

复变函数中最重要的内容之一就是引入了全纯函数的概念, 它直接说明了研究复变函数的重要性: 全纯 (复可微) 并不等同于实可微! 它对函数的要求要强得多. 这里我们补充说明并简单介绍全纯函数的一些几何性质.

先对课上讨论过的保角性作一些补充. 我们已证明了: 若 f 为区域 D 上的全纯映射, 且在 $z_0 \in D$ 处满足 $f'(z_0) \neq 0$, 则 f 在 z_0 处是保角的. 现在我们将要说明: 若 $f'(z_0) = 0$, 则 f 在 z_0 处一定不保角.

为了说明这一点, 我们先来讨论 $f(z) = z^m$ 在原点处是否保角, 这里 $m \geqslant 2$ 为正整数. 任取过原点的光滑正则曲线 $\gamma(t)$, 则像曲线为 $\sigma(t) = (\gamma(t))^m$, 从而 $\sigma'(t) = m\gamma'(t)(\gamma(t))^{m-1}$. 此时

$$\operatorname{Arg}\sigma'(t) = \operatorname{Arg}\gamma'(t) + (m-1)\operatorname{Arg}\gamma(t).$$

由此即可得

$$\lim_{t\to 0}\operatorname{Arg}\sigma'(t) = \lim_{t\to 0}\operatorname{Arg}\gamma'(t) + (m-1)\lim_{t\to 0}\operatorname{Arg}\frac{\gamma(t)}{t} = m\operatorname{Arg}\gamma'(0).$$

所以 $\operatorname{Arg}\sigma'(0) = m\operatorname{Arg}\gamma'(0)$, 对应地

$$\operatorname{Arg}\sigma_2'(0) - \operatorname{Arg}\sigma_1'(0) = m(\operatorname{Arg}\gamma_2'(0) - \operatorname{Arg}\gamma_1'(0)),$$

所以 f 不再保角, 而是将夹角变为原来的 m 倍.

[6]更确切地说, 是指 Hausdorff 以及第二可数

对于一般的全纯函数, 不妨设 $z_0=0$, 且 $f'(0)=0$. 我们先提前用一下 Taylor 展开 (对于复变函数, 全纯与解析 (局部可展开为幂级数) 是等价的):

$$f(z)-f(0)=a_m z^m+a_{m+1}z^{m+1}+\cdots$$

这里 $m\geqslant 2$, a_m 为非零复数. 此时 f 实际就把曲线的夹角扩大为原来的 m 倍.

现在我们从切映射的角度来讨论全纯函数的几何性质. 从二元实函数 $f(x,y)$ 入手, 这时函数的微分 $\mathrm{d}f$ 给出了从切空间 $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ 到 $T_{f(x,y)}\mathbb{R}^2$ 的实线性变换[7]. 现在, 我们在 $\mathbb{R}^2$ 上赋予复数的代数结构, 这时我们可以自然地考虑: 何时 f 能成为复线性映射? 实际上, 我们有下述定理.

定理 1. *f 在 $z\in\mathbb{C}$ 处复可微, 当且仅当 f 在 $z\in\mathbb{C}$ 处实可微, 且 $\mathrm{d}f:T_z\mathbb{C}\to T_{f(z)}\mathbb{C}$ 是复线性映射.*

证明. 我们实际只需证明, 在 f 实可微时, $\mathrm{d}f:T_z\mathbb{C}\to T_{f(z)}\mathbb{C}$ 是复线性映射等价于 Cauchy-Riemann 方程在 z 处成立. 设 $f=u+\mathrm{i}v$. 若将 $T_z\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{C}$, 则 $1=(1,0),\mathrm{i}=(0,1)$ 是该切空间的一组基. 计算可得

$$\mathrm{d}f(\mathrm{i}(1,0))=\mathrm{d}f((0,1))=(u_y,v_y),\ \mathrm{i}\mathrm{d}f((1,0))=\mathrm{i}(u_x,v_x)=(-v_x,u_x).$$

$$\mathrm{d}f((0,1)\mathrm{i})=f((-1,0))=(-u_x,-v_x),\ \mathrm{i}\mathrm{d}f((0,1))=\mathrm{i}(u_y,v_y)=(-v_y,u_y).$$

由上述即证. □

复线性条件是一个代数条件. 现在, 我们从几何角度来讨论该条件. 任取 $X\in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}$, $X\mapsto \mathrm{i}X$ 可以视作在切平面上的一个作用, 它把切向量逆时针旋转了 $\frac{\pi}{2}$[8]. 所以, 我们得到了一族光滑映射 $j=\{j_z:T_z\mathbb{C}\to T_z\mathbb{C}\mid z\in\mathbb{C}\}$, $j_z(X)=\mathrm{i}X$. 每个切平面 $T_z\mathbb{C}$ 上存在自然的基 $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, 在作用 j_z 下变换为 $e_1\mapsto e_2, e_2\mapsto -e_1$. 在上述记号下, f 在 z 处全纯等价于 $(\mathrm{d}f)_z\circ j_z=j_z\circ(\mathrm{d}f)_z$, 在 $\mathbb{C}$ 上全纯等价于 $\mathrm{d}f\circ j=j\circ\mathrm{d}f$. 这是全纯的另一种等价定义.

(下面是一些超前介绍, 可以不看) 实际上, 对于一般的复流形 (例如球面), 它们在局部与 $\mathbb{C}^n$ 中的开集同胚, 也可以定义完全类似的作用 (比如球面, 它在北极邻域与南极邻域与 $\mathbb{C}$ 同胚):

$$j_p:T_pM\to T_pM,\ \frac{\partial}{\partial x_i}\mapsto\frac{\partial}{\partial y_i},\ \frac{\partial}{\partial y_i}\mapsto-\frac{\partial}{\partial x_i},$$

这里 $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_n}\}$ 是切空间 T_pM 的一组基. 这是由流形上的**复结构**定义的作用. 设 $(M,j_M),(N,j_N)$ 为复流形, 则光滑映射 $f:M\to N$ 全纯等价于 $\mathrm{d}f\circ j_M=j_N\circ\mathrm{d}f$.

---

[7]课上细讲这个概念

[8]这其实也说明了, 若 $\mathrm{d}f$ 是单射 (即 f 是浸入, 此时表现为局部微分同胚), 则 $\mathrm{d}f$ 是保角的. 这就是我们课上所讲的保角性

这种定义的重要之处在于, 我们可以适当放松对函数族 j 的要求, 来获得更一般的几何结构与函数性质. 例如: 如果光滑映射族 $J = \{J_p : T_pM \to T_pM\}$ 满足 $J_p^2 = -\mathbb{1}$, 我们就称 J 是一般流形 M 上的**近复结构**. 在这种意义下, 我们可以定义所谓**拟全纯函数** (J-holomorphic function) 为 $f : (M, J_M) \to (N, J_N)$, 满足 $\mathrm{d}f \circ J_M = J_N \circ \mathrm{d}f$. 容易看到, 复结构是特殊的近复结构, 全纯函数是特殊的拟全纯函数.

综上所述, 全纯概念不仅仅是分析学上很重要的概念, 它还具有着很深刻的几何意义. 复分析这门课也是兼具分析与几何特征的课程!

(如果还有些时间, 这里可以前瞻性地介绍一些这学期会学到的全纯函数的分析性质, 讲义里不再赘述)