Chapter 3 更新理论

3.1

$N(t) := \max\{n : S_n \le t\}$.

$m(t) := E[N(t)]$.

$P(N(t)=n) = P(S_n \le t) - P(S_{n+1} \le t)$.

Thm. 3.2.1 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$. $F_n(t)$为S_n的分布函数.

Thm 3.2.2. 对$\forall\, 0 \le t < \infty$, $m(t) < \infty$

pf. $\exists\, \alpha > 0$ s.t. $P(X_n \ge \alpha) > 0$, 令 $\bar{X}_n = \alpha \cdot I(X_n \ge \alpha)$; 从而 $\bar{X}_n$ 更新次数为几何变量, $E[N(t)] \le E[\bar{N}(t)] \le \frac{t/\alpha + 1}{P(X_n \ge \alpha)} < \infty$.

Thm 3.3.1 $t \to \infty$时 $\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$, a.s. 其中, $\mu = E[X_n]$.

pf. 有不等关系 $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \le \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$. $t \to \infty$时. $N(t) \to \infty$. $\Rightarrow \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$, a.s.

$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \to \mu$, a.s.

3.3.

Def 停时 $X_1, X_2 \ldots$ 为 r.v. 序列. N为整值 r.v. 若对$\forall\, n = 1, 2, \cdots$, 事件$\{N=n\}$与$X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$独立, 则称$N$为序列$\{X_n\}$的停时.

Wald 方程 $X_1, X_2, \cdots$ i.i.d, $E[X] < \infty$. N为$\{X_n\}$停时, $E[N] < \infty$. 那么 $E[\sum_{i=1}^{N} X_i] = E[X]E[N]$

Col 3.3.3. $E[S_{N(t)+1}] = \mu[m(t)+1]$

pf. $N(t)+1$为$\{X_n\}$的停时, 用Wald方程立证. 而$E[S_n] = \mu m(t)$ 不对.

Thm (基本更新定理) $\frac{m(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$, $t \to \infty$.

Thm 3.3.5 $\frac{N(t) - t/\mu}{\sigma\sqrt{t/\mu^3}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

3.4 关键更新定理.

Thm 3.4.1 (Blackwell)

(i) 若F非格点, 则对 $\forall a \geq 0$, $m(t+a)-m(t) \to \frac{a}{\mu}$, $t \to \infty$.

(ii) 若F是具有周期 d 的格点分布, 则 $n \to \infty$ 时有 E[在 nd 的更新次数] $\to \frac{d}{\mu}$.

Lem 3.4.3. $P(S_{N(t)} \leq s) = \overline{F}(t) + \int_0^s \overline{F}(t-y)\, dm(y)$.

pf. $P(S_{N(t)} \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \leq s, S_{n+1} > t) = \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq s, S_{n+1} > t)$

$= \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^s P(S_n \leq s, S_{n+1} > t \mid S_n = y)\, dF_n(y) = \overline{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^s \overline{F}(t-y)\, dF_n(y)$

$= \overline{F}(t) + \int_0^s \overline{F}(t-y)\, d\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n(y)\right) = \overline{F}(t) + \int_0^s \overline{F}(t-y)\, dm(y)$.

Thm (关键更新定理)

若F不为格点分布, 且 $h(t)$ 是 Riemann 可积的, 有 $\lim_{t\to\infty} \int_0^t h(t-x)\, dm(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} h(t)\, dt$

另一种表述: $\lim_{t\to\infty} \frac{dm(t)}{dt} = \frac{1}{\mu}$.

· 交替更新过程.

Thm 3.4.4. $p(t) := P$(在时刻 t 系统在开状态), 则 $\lim_{t\to\infty} p(t) = \frac{E[Z_n]}{E[Z_n]+E[Y_n]}$

Thm 3.4.5. 若到达时间分布不是格点的, 且 $\mu < \infty$, $\mu = E[X]$, $X_n = Z_n + Y_n$. 则有

$\lim_{t\to\infty} P(Y(t) \leq x) = \lim_{t\to\infty} (A(t) \leq x) = \int_0^x \overline{F}(y)\, dy / \mu$

· 平衡更新过程 $F_e := \int_0^x \overline{F}(y)\, dy / \mu$. 具有 $G = F_e$ 的延迟更新过程称为平衡更新过程

定理 3.5.2. 对于平衡更新过程:

(i) $m_D(t) = t/\mu$

(ii) 对 $\forall t \geq 0$. $P(Y_D(t) \leq x) = F_e(x)$

(iii) $\{N_D(t), t \geq 0\}$ 有平稳增量