中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

· 依测度收敛：

E为可测集，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a.e.处处有限 若对$\forall \varepsilon>0$. $\lim_{n\to\infty} m(|f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon)=0$

则称 f_n 依测度收敛于 f.

claim 1. 若 $f_n\to f$, $f_n\to\tilde{f}$ in measure, then $f=\tilde{f}$ a.e.

pf. $|\tilde{f}(x)-f(x)|\geq\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f_n(x)|+|\tilde{f}(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-f_n(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}$ 或 $|\tilde{f}(x)-f_n(x)|\geq\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \{x\in E \mid |f-f_n|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{x\in E \mid |\tilde{f}-f_n|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}\supset\{x\in E \mid |\tilde{f}(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}$

取 $n\to\infty$. 右端被0逼近. 从而 $f=\tilde{f}$ a.e.

回顾: a.e.处处收敛 $m(\{x\in E \mid \lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0$ for all $\varepsilon>0$.

近一致收敛 对$\forall\varepsilon>0$, $\exists$可测集$E_\varepsilon\subset E$ s.t. $m(E\setminus E_\varepsilon)<\varepsilon$ 且 f_n在E_ε上一致收敛于f.

① $m(E)=+\infty$

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{R}\setminus[-n,n]\\ 0 & x\in[-n,n]\end{cases}$$

近一致收敛 $\nearrow$ a.e.收敛

近一致收敛 $\searrow$ 依测度收敛.

② $m(E)<+\infty$

近一致收敛 $\Leftrightarrow$ a.e.收敛

$$f_n^{(m)}(x)=\begin{cases}1 & \frac{m-1}{n}<x<\frac{m}{n}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$\searrow$ 依测度收敛 $\swarrow$

Facts ① a.e.收敛在 $m(E)<\infty$ 时可推出依测度收敛.

② 依测度收敛有近一致收敛(a.e.收敛)子列

③ 依测度收敛 $\Longleftrightarrow$ 任一子列有近一致收敛(a.e.收敛)子列.

③. 证明. ($\Rightarrow$) 显然; ($\Leftarrow$) 假设 $f_n \not\to f$ in measure, 则

$\exists\, \varepsilon>0, \delta>0, \{f_{n_k}\}$ s.t. $\lim\limits_{k\to\infty} m(\{x\in E \mid |f_{n_k}-f|\geq\varepsilon\}) \geq \delta$.

由题设 $\{f_{n_k}\}$ 有近一致收敛于 f 的子列 $\{f_{n_{k_p}}\}$.

从而 $f_{n_{k_p}} \to f$ in measure 矛盾.

① 证明. 不收敛点集 $N=\{x\in E \mid \lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|\neq 0\} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n\geq k}\{x\in E \mid |f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{m}\}$.

$m(N)=0 \Rightarrow m\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n\geq k}\{x\in E \mid |f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{m}\}\right)=0$

由于 $m(E)<\infty$, 从而 $\lim\limits_{k\to\infty}\bigcup\limits_{n\geq k}\{x\in E \mid |f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{m}\}=0$, for all m

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\{x\in E \mid |f_n(x)-f(x)|\geq\frac{1}{m}\}=0$. for all m.

Def $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是依测度 Cauchy 列. 若对 $\forall\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n,m\to\infty} m(\{x\in E \mid |f_m(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon\})=0$.

则称 $\{f_n\}$ 为依测度 Cauchy 列.

Thm. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是依测度 Cauchy 列, 则 $\exists f$. 为几乎处处有限可测函数, $f_n\to f$ in measure.

③ 证明. 只需证 若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是依测度 Cauchy 列, $\exists f$, $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. f_{n_k} 近一致收敛于 f. claim. $\exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $m(\{x \mid f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|\geq\frac{1}{2^k}\})<\frac{1}{2^k}$

因为: 固定 $\varepsilon>0$, 对 $\forall\delta>0$, $\exists N_{\varepsilon,\delta}\in N^+$, 当 $n,m>N_{\varepsilon,\delta}$ 时 $m(\{x \mid f_m(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon\})<\delta$

取 $\varepsilon=\frac{1}{2^k}$, $\delta=\frac{1}{2^k}$. 并可取 N_k 递增. 即证.

$E_k := \{x\in E \mid |f_{n_k}-f_{n_{k+1}}|\geq\frac{1}{2^k}\}$, 从而 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $F_n=\bigcap\limits_{k\geq n}E_k^c$ 上一致收敛

这是因为 $|f_{n_k}-f_{n_{k+p}}|\leq\frac{1}{2^{k-1}}$, 一致成立. $\exists f_n(x)$ s.t. $f_{n_k}(x)\to f_n(x)$, $\forall x\in F_n$

而 $m(E\setminus F_n)=m(\bigcup\limits_{k\geq n}E_k)\leq\frac{1}{2^{n-1}}$.