DATE Real Analysis

lemma 1 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可测，对 $\forall B \subset \mathbb{R}$，$B$ 为 Borel 集，$f^{-1}(B)$ 可测

proof. $\mathcal{A} \triangleq \{E \mid f^{-1}(E) \text{可测}\}$

① $\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$ ② $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$

① 说明A对并封闭
② 说明A对补封闭
} ⇒ A是σ代数 ⇒ A含有所有Borel集

Def ① 称X为疏集，若 $\overline{X}^c = \phi$

② 称X为第一纲集，若X为可列个疏集的并

③ 非第一纲集的集合为第二纲集

Baire Category Theorem：完备度量空间中开集为第二纲集.

prop. $\mathbb{Q}$ 为非 G_δ 集

proof. 若 $\mathbb{Q}$ 是 G_δ 集，可设 $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. G_n 开. 则 $\mathbb{Q}^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c$ ($F_n := G_n^c$)，而 F_n 无内点

⇒ $\mathbb{Q}^c$ 为第一纲集 ⇒ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$ 也为第一纲集，矛盾

prop. 若 f 在 $[a,b]$ 上可导，则 f' 的连续点在 $[a,b]$ 中稠密

lemma 3. 设 $\{f_k\} \in C(\mathbb{R}^n)$，且 $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$ forall x in $\mathbb{R}^n$，则

f 的连续点集为 $\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{\circ}(\frac{1}{m})$，$E_k(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f_k(x) - f(x)| \le \varepsilon\}$

lemma 4. 设 $f_k \in C(\mathbb{R}^n)$，$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$，则 f 的不连续点集为第一纲集.

proof. $F_k(x) = \frac{f(x+1/k) - f(x)}{1/k}$ 取 $\varepsilon > 0$，$\frac{1}{k} < \varepsilon$. 考虑区间 $[a, b-\varepsilon]$

$F_k(x) \to f'(x)$ when $k \to +\infty$，$\forall x \in [a, b-\varepsilon]$.，由 lemma 4，$f'$ 在 $[a, b-\varepsilon]$ 上不连续点为第一纲集

由Baire纲定理，f' 连续点在 $(a, b-\varepsilon)$ 上为第二纲集 ⇒ f' 在 $(a, b-\varepsilon)$ 上一定有连续点 ⇒ 连续点稠密

prop. 在 $\mathbb{R}$ 中存在两个不交的集合 A, B 使得对 $\forall I \subset \mathbb{R}$，$I = (a,b)$，$m(A \cap (a,b)) > 0$；$m(B \cap (a,b)) > 0$.

proof. claim：$\mathbb{R}$ 上存在测度非0的疏集（如类Cantor集，$E \triangleq [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n - \frac{1}{2^{n+2}}, x_n + \frac{1}{2^{n+2}})$）

step 1. 在 $(0,1)$ 上找一个类Cantor集 $E_{1,1}$，$(0,1) - E_{1,1}$ 为开集，再取 $E_{1,2} \subset (0,1) - E_{1,1}$ 是类Cantor集.

step 2 $(E_{1,2} \cup E_{1,1})$ 为疏集 ⇒ $(0, \frac{1}{2}) - (E_{1,1} \cup E_{1,2})$ 为开集，可找到 $E_{2,1}, E_{2,2}$ 均为类Cantor集，

且不交. .

构造出一列 $E_{11}\ E_{12}$；$E_{21}, \cdots E_{24}$；$\cdots E_{k,n}$，$n = 1, 2, \cdots 2^k$ 且 $E_{k,2n-1}, E_{k,2n} \subset (\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}})$.

任何 I 都包含小区间 $(\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}})$

prop. 可以将所有有理数排成 $\{r_n\}_1^\infty$ s.t. $\bigcup_{n=1}^\infty (r_n-\frac{1}{n}, r_n+\frac{1}{n}) \neq \mathbb{R}$

proof. 固定 $x\in\mathbb{R}$. $E_1 = \mathbb{Q}\cap\{y: |y-x|>1\}$, $E_n = \mathbb{Q}\cap\{y: \frac{1}{n}<|y-x|\le\frac{1}{n-1}\}$

$E_i=\{a_m^i\}_{m=1}^\infty$. 将有理数排列:

$$\begin{array}{cccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \cdots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \end{array}$$

那么 x 便不在 $\bigcup_{n=1}^\infty (r_n-\frac{1}{n}, r_n+\frac{1}{n})$ 中.

prop. 有限个疏集的并仍是疏集

proof. 只需证两个的情况.

首先 $A\subset X$ 稀疏 $\Leftrightarrow (\bar{A})^\circ=\emptyset \Leftrightarrow X=[(\bar{A})^\circ]^c=\overline{(\bar{A})^c} \Leftrightarrow (\bar{A})^c$ 稠密

$\Leftrightarrow$ 对 $\forall$ 非空开集 U, $U\cap(\bar{A})^c\neq\emptyset$.

下面证明 $\forall$ U 为开集, $U\cap(\overline{A\cup B})^c = U\cap(\bar{A}\cup\bar{B})^c = U\cap(\bar{A})^c\cap(\bar{B})^c\neq\emptyset$.

而由 A 稀疏, $U\cap(\bar{A})^c\neq\emptyset$. $U\cap(\bar{A})^c$ 也为开, 故 $U\cap(\bar{A})^c\cap(\bar{B})^c\neq\emptyset$. 证毕.