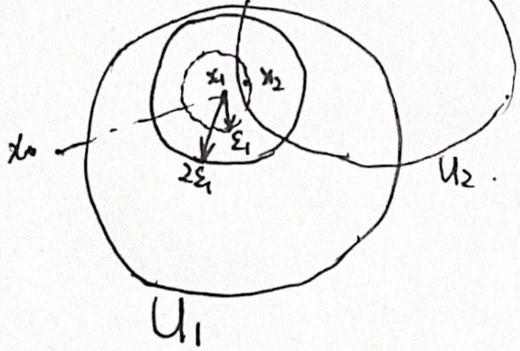
Thm (Baire) X, 完备

U_i 为开的,稠密的集合族 $\Rightarrow \cap U_i$ 稠密

F_i 闭,无内点 $\Rightarrow \cup F_i$ 无内点

proof: 先∀取 $x_0 \in X$.



① 取 $x_1 \in U_1$, 那么对∀ε_0, ∃ $x_1 \in U_1$, $d(x_0, x_1) < \varepsilon_0$.

∃ $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_0}{2}$, s.t. $\overline{B(x_1, 2\varepsilon_1)} \subset U_1$

② 取 $x_2 \in U_2$, s.t. $d(x_1, x_2) < \varepsilon_1$

∃ $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2}$ s.t. $\overline{B(x_2, 2\varepsilon_2)} \subset U_2$

⋮

Claim: $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

$d(x_{n+p}, x_n) \le 2\varepsilon_n$. 令 $p \to \infty$. $d(x_\infty, x_n) \le 2\varepsilon_n$.

$\Rightarrow x_\infty \in U_n$. 对∀n成立.

① $\limsup \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\limsup A_n}$

pf. $x \in \limsup A_n \Leftrightarrow \exists n_k \to \infty\ x \in A_{n_k} \Leftrightarrow \exists n_k \to \infty\ \mathbb{1}_{A_{n_k}}(x) = 1 \Leftrightarrow \limsup \mathbb{1}_{A_n(x)} = 1$

$\liminf \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\liminf A_n}$

② $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$

③ $\limsup (A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$

$\liminf (A_n \cap B_n) \subset \liminf A_n \cap \liminf B_n$