实分析习题课 #1

DATE / /

- Def 1. 有限集，A, B 等势 记为 $A \sim B$，如果存在 双射 $\varphi: A \to B$.
- lemma. X, Y 为集合 $f: X \to Y$; $g: Y \to X$. 则存在 X, Y 的不交分解: $X = A \cup A'$; $Y = B \cup B'$ s.t. $f(A) = B$; $f(B') = A'$

pf 若 $f(X) = Y$, 结论平凡. 下面假设 $f(X) \neq Y$. 命 $\Gamma = \{E \subseteq X, E \cap g(Y - f(E)) = \phi\}$

$A := \bigcup_{E \in \Gamma} E$ 为满足 $A \cap g(Y - f(A)) = \phi$ 的最大集

令 $B = f(A)$, $B' = Y - B$ 且 $A' = g(B')$. A, A' 显然不交 若 $A \cup A' \neq X$. 则 $\exists x_0 \in X$, $x_0 \notin A \cup A'$.

令 $A_0 = A \cup \{x_0\}$. 那么 $Y - f(A_0) \subseteq B' \Rightarrow g(Y - f(A_0)) \subseteq A' \Rightarrow A_0$ 也满足 $A \cap g(Y - f(A)) = \phi$

这与 A 最大矛盾. 故 $A \cup A' = X$. Q.E.D.

- Thm. (Cantor-Bernstein) 若存在两个单射. $f: X \to Y$; $g: Y \to X$, 则 $X \sim Y$.

pf. 构造双射 $\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g^{-1}(x) & x \in A' \end{cases}$. □

- Thm 任意集合与自己的幂集不等势.

pf. A, 幂集为 $P(A)$. 构造任一单射 $f: A \to P$. 需证 $f(A) \neq P(A)$.

构造 $C = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$ 若 $C \in f(A)$, 则 $\exists a \in A$, $f(a) = C$

然而 $\begin{cases} a \in C \to a \notin C; \\ a \notin C \to a \in C \end{cases} \Rightarrow C \notin f(A) \Rightarrow f(A) \neq P(A)$

- Thm $(0,1]$ 不可数

若可数, 存在 $f: \mathbb{N} \to (0,1]$.

$f(1) = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$

$\vdots$

$f(n) = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots$

命 $b_n = \begin{cases} 1 & 若 a_{nn} \neq 1 \\ 2 & 若 a_{nn} = 1 \end{cases}$, 则 $0.b_1b_2\cdots \in (0,1]$. 但不是任何 m 的像, 矛盾. □

- Def 2. 若 G 是开集的可数交, 则 G 为 G_δ 集; 若 F 是闭集的可数并, 则 F 为 F_σ 集.
- Thm (Baire) 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为 F_σ 集, 若 F_k 均没有内点, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 E 也没有内点.

pf. 假设 E 有内点 x_0. 则 $\exists \delta_0 > 0$. $\overline{B_{\delta_0}(x_0)} \subset E$. 由于 F_1 无内点, $\exists x_1 \in B_{\delta_0}(x_0)$ 且 $x_1 \notin F_1$. 由 F_1 闭, 存在 $0 < \delta_1 < 1$. s.t. $\overline{B_{\delta_1}(x_1)} \cap F_1 = \phi$. 同时有 $\overline{B_{\delta_1}(x_1)} \subset B_{\delta_0}(x_0)$ … 可依次构造 $\{x_n\}$, 及 $\{\delta_k\}$, $0 < \delta_k < \frac{1}{k}$ 且 $\overline{B_{\delta_k}(x_k)} \subset B_{\delta_{k-1}}(x_{k-1})$ 且 $\overline{B_{\delta_k}(x_k)} \cap F_k = \phi$. $\{x_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中 Cauchy 列. 从而 $\exists x \in \mathbb{R}^n$, $\{x_n\} \to x \in E$. 而 $|x - x_k| \leq |x - x_l| + |x_l - x_k| < |x - x_l| + \delta_k$. 令 $l \to \infty$ $|x - x_k| \leq \delta_k \Rightarrow x \in \overline{B_{\delta_k}(x_k)}$ 即对一切 k, $x \notin E$. 这与 $x \in E$ 矛盾. □