Lec9 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 4 日

例 4.1. P103.4：设 f 在 $B(0,R)$ 中全纯，$0<r<R$，则

(1) $f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\,\theta$(平均值公式)。

(2) $f(0)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{|z|<r}f(z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$。

证明. (1) $f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}\,z=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}re^{i\theta}\cdot i\,\mathrm{d}\,\theta$。

(2) $RHS=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi f(0)\rho\,\mathrm{d}\,\rho=f(0)$。

□

例 4.2. P103.5：设 u 为 $B(0,R)$ 中的调和函数，则对 $0<r<R$，

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\,\theta.$$

称为调和函数的平均值公式。

证明. 由于 $B(0,R)$ 单连通，存在 V 使得 $U+iV$ 全纯，故在 4(1) 中两边取实部即可。 □

5 Cauchy 积分公式的应用

定理 5.1. *Cauchy* 不等式：设 f 在 $B(a,R)$ 中全纯，且对任意 $z\in B(a,R)$, $|f(z)|\le M$，则

$$|f^{(n)}(a)|\le\frac{n!\cdot M}{R^n},\ n=1,2,\cdots.$$

证明. 取 $0<r<R$，f 在 $\overline{B(a,r)}$ 中全纯，从而

$$|f^{(n)}(a)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta\right|\le\frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r=\frac{n!M}{r^n}.$$

令 $r\to R$ 即可。 □

定理 5.2. *Liouville* 定理：有界的整函数[1]为常数。

证明. 设 $|f(z)|\le M$, $\forall\,z\in\mathbb{C}$，任取 $a\in\mathbb{C}$, $\forall\,R>0$，由定理 5.1，$|f'(a)|\le\frac{M}{R}$，令 $R\to+\infty$，则 $f'(a)=0$，从而 $f'(z)\equiv0\Rightarrow f=$ 常数。 □

[1]即在 $\mathbb{C}$ 上全纯的函数。

定理 5.3. 代数学基本定理：任意非常数的复系数多项式

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \, (a_n \neq 0)$$

在 $\mathbb{C}$ 中有零点。

证明. 反证法。假设 $P(z) \neq 0, \forall\, z \in \mathbb{C}$，则 $\frac{1}{p(z)}$ 全纯。于是

$$|P(z)| = |a_n z^n| \left| \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}\right) \right| \to +\infty, \, (|z| \to +\infty)$$

从而存在 $R > 0$，当 $|z| > R$ 时 $|\frac{1}{P(z)}| \leq 1$，而 $\frac{1}{P(z)}$ 在 $\overline{B(0,R)}$ 中连续 $\Rightarrow \exists\, M > 0,\ s.t.\ |\frac{1}{P(z)}| \leq M, \forall\, z \in \overline{B(0,R)}$，所以 $\frac{1}{p(z)}$ 为有界的整函数，于是为常数，进而 $P(z)$ 为常数，矛盾。 □

定理 5.4. *Morera*：设 f 在区域 D 中连续，且沿着 D 中任意可求长简单闭曲线的积分为零，则 f 在 D 中全纯。

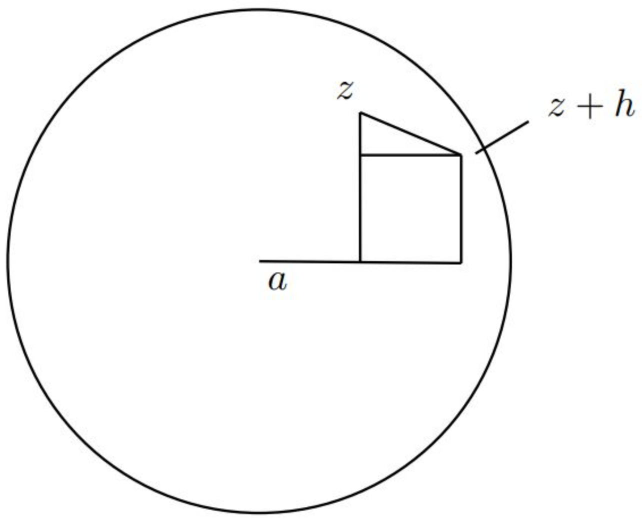
证明. 由条件知，变上限积分 $F(z) = \int_a^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta$ 有定义，且 $F(z)$ 全纯，$F'(z) = f(z) \Rightarrow f(z)$ 全纯。 □

评论. 将条件减弱为"沿 D 中任意三角形边界积分为零"，结论仍成立。

任取 $a \in D$，取 $\delta > 0\ s.t.\ \overline{B(a,\delta)} \subset D$，对 $\forall\, z \in B(a,\delta)$，定义

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta,$$

其中 γ_z 为从 a 出发，先水平，再竖直的到 z 的唯一道路。



下证 $F'(z) = f(z)$。

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_\Gamma f(\zeta)\,\zeta$$

(Γ 为连接 z 和 $z+h$ 的线段)，

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_\Gamma (f(\zeta) - f(z))\,\mathrm{d}\,\zeta \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_\Gamma |f(\zeta) - f(z)||\,\mathrm{d}\,\zeta|.$$

6 非齐次的 Cauchy 积分公式

设 $f=u+iv,\ u,v\in C^1(D)$，f 可以看出 $z,\overline{z}$ 的函数，

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}\overline{z}=\mathrm{d}x-i\mathrm{d}y.$$

定义 $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z=0,\ \mathrm{d}\overline{z}\wedge\mathrm{d}\overline{z}=0,\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}=-\mathrm{d}\overline{z}\wedge\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}=-2i\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，以及

- 0 次微分形式：$\omega=f(z)$；
- 1 次微分形式：$\omega=f(z)\mathrm{d}z+g(z)\mathrm{d}\overline{z}$；
- 2 次微分形式：$\omega=f(z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}$。

则 d 为外微分算子：

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\mathrm{d}\overline{z},$$

$$\mathrm{d}(f(z)\mathrm{d}z+g(z)\mathrm{d}\overline{z})=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}z+\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}\overline{z}=\left(-\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}+\frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}.$$

定理 6.1. *Green* 公式: 设区域 D 是由若干条可求长简单闭曲线围成的区域, $\omega=f(z)\mathrm{d}z+g(z)\mathrm{d}\overline{z}$ 是 D 上的一次微分形式，其中 $f,g\in C^1(D)$，则

$$\int_{\partial D}\omega=\int_D\mathrm{d}\,\omega.$$

定理 6.2. *Pompeiu* 公式：设 D 是由若干条可求长简单闭曲线围成的区域，$f\in C^1(\overline{D})$，则对 $\forall\,z\in D$，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\,\zeta+\frac{1}{2\pi i}\iint_D\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\,\zeta\wedge\mathrm{d}\,\overline{\zeta}.$$

证明. 设 $z\in D$，$\forall\,\varepsilon>0$，取 $\eta>0\ s.t.\ \overline{B(z,\eta)}\subset D$，当 $|\zeta-z|<\eta$ 时 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$。记 $B_\eta=B(z,\eta)$，令 $G_\eta=D\setminus\overline{B}_\eta$，$\omega=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\ (\zeta\in G_\eta)$，由 Green 公式，

$$\int_{\partial G_\eta}\omega=\iint_{G_\eta}\mathrm{d}\,\omega,\ \mathrm{d}\omega=\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\overline{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta.$$

从而

$$\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\zeta-\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\,\zeta=\iint_{G_\eta}\mathrm{d}\,\omega.$$

而这里 $\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\,\zeta=2\pi i\cdot f(z)$，且

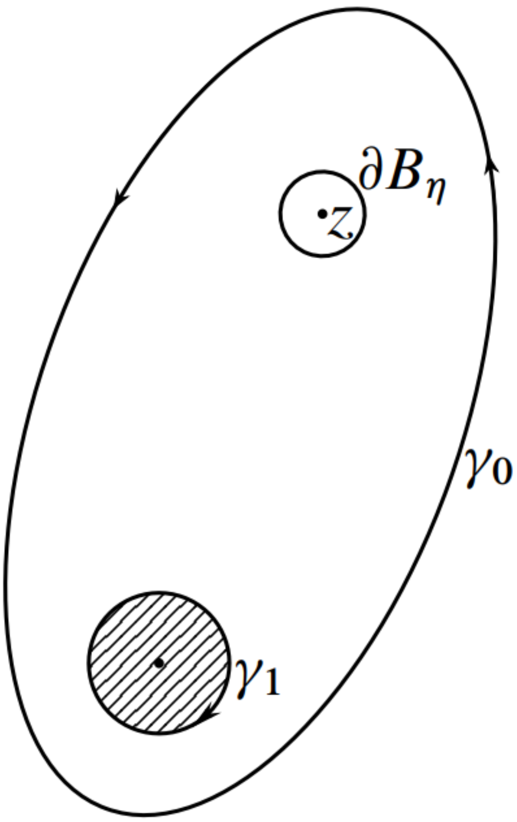
$$\lim_{\eta\to0}\iint_{G_\eta}\mathrm{d}\,\omega=\lim_{\eta\to0}\left(\iint_D\mathrm{d}\,\omega-\iint_{B_\eta}\mathrm{d}\,\omega\right)=\iint_D\mathrm{d}\,\omega.$$

这是因为 $\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}$ 在 $\overline{B_\eta}$ 上连续 $\Rightarrow\exists\,M=M(z,\eta)>0,\ s.t.\ \left|\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\right|\le M$，于是

$$\left|\iint_{B_\eta}\mathrm{d}\,\omega\right|=\left|\iint_{B_\eta}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\,\overline{\zeta}\wedge\mathrm{d}\,\zeta\right|$$

$$\iint_{B_\eta}M\cdot\frac{1}{|\zeta-z|}|2i|\cdot\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=2M\int_0^\eta r\,\mathrm{d}\,r\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}\,\theta=4M\pi\eta\to0\ (\eta\to0).$$

□


∂B_η
z
γ_0
γ_1