Lec8 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 30 日

3　全纯函数的原函数

我们熟知，对于 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，则 f 有原函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$。

那么，是否类似地对 $f\colon D\to\mathbb{C}$ 全纯，f 也有原函数呢？

很遗憾，并非如此。

例如，$f(z)=\frac{1}{z}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$f(z)$ 是原函数。这是因为如果 $f(z)$ 由原函数，则 $\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z=0$，但 $\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z=2\pi i$，矛盾。

定理 3.1. 设 $f\colon D\to\mathbb{C}$ 连续，如果对 D 中任何可求长简单闭曲线 γ，$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$，则 $F(z)=\int_{z_0}^z f(z)\,\mathrm{d}\,z$ 是 $f(z)$ 的一个原函数。

证明. 由条件知 $F(z)$ 是良定义的。

任取 $a\in D$，对 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, $B(a,\delta)\subset D$，且当 $|z-a|<\delta$ 时，$|f(z)-f(a)|<\varepsilon$。于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a}-f(a)\right| &= \frac{1}{|z-a|}\left|\int_{\gamma_z} f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_{\gamma_z} f(a)\,\mathrm{d}\,z\right| \\ &\le \frac{1}{|z-a|}\int_{\gamma_z}|f(z)-f(a)||\,\mathrm{d}\,z|\le\frac{1}{|z-a|}\varepsilon\cdot|z-a|=\varepsilon\end{aligned}$$

从而 $F'(a)=f(a)$。 □

推论. 若 D 为单连通区域，$f\colon D\to\mathbb{C}$ 全纯，则 f 有原函数。

证明. 对 D 中的任意可求长简单闭曲线 γ，由单连通性，γ 的内部包含在 D 中，由 Cauchy 积分定理，$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$。 □

定理 3.2. 设 D 为单连通区域且 $0\notin D$，则存在 D 上的全纯函数 $F(z)$，满足 $e^{F(z)}=z$，即 $\mathrm{Log}z$ 在 D 中有单值分支。

证明. 固定 $z_0 \in D$，令 $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z + C_0$, $(e^{C_0} = z_0)$。由于 D 单连通，$F(z)$ 良定义。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(ze^{-F(z)}\right) = e^{-F(z)} + ze^{-F(z)}(-F'(z)) = 0,\ \forall\, z,\\
\Rightarrow & ze^{-F(z)} = \text{const.} = z_0 e^{-F(z_0)} = z_0 e^{-C_0} = 1\\
\Rightarrow & e^{F(z)} = z.
\end{aligned}
$$

□

该定理可进一步推广。

定理 3.3. 设 f 为单连通区域 D 上的全纯函数且 $f(z) \neq 0, \forall\, z \in D$，则存在 D 上的全纯函数 $F(z)$ 满足 $e^{F(z)} = f(z)$，即 $\mathrm{Log} f(z)$ 在 D 中有单值分支。

评论. 若 D 非单连通，则 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}\,z$ 可能是多值函数。

例 3.1. $f(z) = \frac{1}{z}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$，取 $z_0 = 1$。

按第一种路径，有

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z\\
&= \int_1^{|z|} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x + \int_0^{\arg z} \frac{re^{i\theta}\cdot i\,\mathrm{d}\,\theta}{re^{i\theta}},\quad |z| = r\\
&= \log|z| + i\arg z.
\end{aligned}
$$

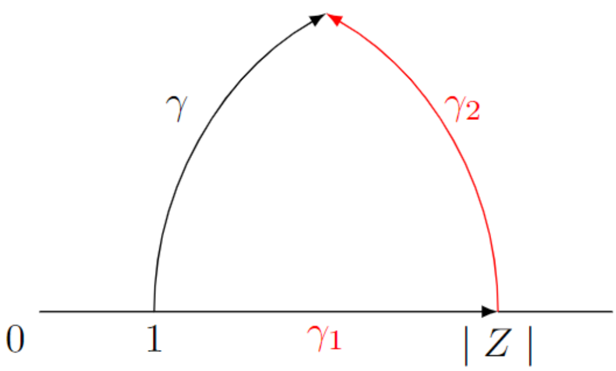

图 1: 第一种路径

按第二种路径，有

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z &= 2\pi i + \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z\\
&= \log|z| + i\arg z + 2\pi i.
\end{aligned}
$$

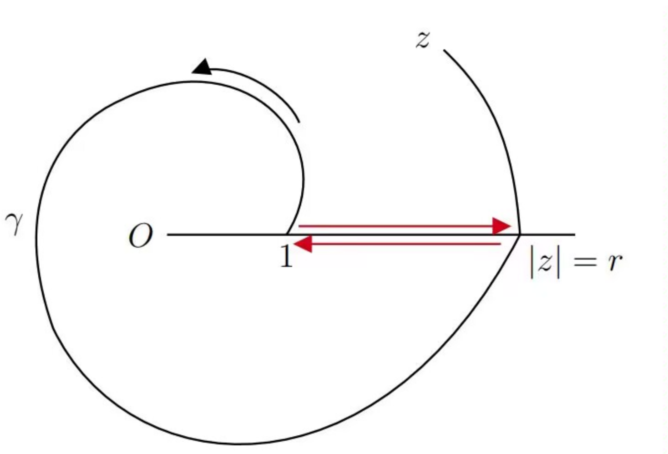

图 2: 第二种路径

4 Cauchy 积分公式

定理 4.1. 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的区域，如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，则对任意 $z \in D$, $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta$。

证明. 设 $z \in D$，对 $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$ $s.t.$ $B(z,\delta) \subset D$，当 $|\zeta - z| \leq \delta$ 时 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$。于是

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - f(z)\right| \\
=&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,z - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta\right| \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\delta} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|}|\,\mathrm{d}\,\zeta| \leq \frac{1}{2\pi}\varepsilon\frac{1}{\delta}2\pi\delta = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

定理 4.2. 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的区域，$f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，则 f 在 D 中有任意阶导数，对 $\forall\, z \in D$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta,\ (n \geq 0).$$

证明. $n = 0$ 即定理 4.1。假设结论对 $n - 1$ 成立。

$\forall\, z \in D$, $\forall\, h \in \mathbb{C}$ $s.t.$ $z + h \in D$，则

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{h}\left(\frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n}\right)\mathrm{d}\,\zeta.$$

再利用 $a^n - b^n = (a-b)\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-1-j}$,

$$
\begin{aligned}
&=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(\zeta - z - h)^j(\zeta - z)^{n-1-j}}\,\mathrm{d}\,\zeta \\
&\overset{h\to 0}{\to}\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta.
\end{aligned}
$$

□

评论. 若 D 是由若干条简单闭曲线围成的区域，结论也成立。

推论. 若 f 在区域 D 上全纯，则 f 在 D 上有任意阶导数。特别地，全纯函数的导函数也是全纯的。

证明. $\forall\, z \in D,\ \exists\, \delta > 0,\ B(z,\delta) \subset D$，对 $\gamma = \partial B(z,\delta)$，由定理 4.2 即可。 □

例 4.1. 计算 $I = \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}\, z}{z^2(z^2+16)}$。

解. 分两种方法计算：

(1) $I = \frac{1}{16}\int_{|z|=2}(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+16})\,\mathrm{d}\, z = 0$。

(2) $I = \int_{|z|=2} \frac{\frac{1}{z^2+16}}{(z-0)^2}\,\mathrm{d}\, z = 2\pi i \left(\frac{1}{z^2+16}\right)'\Big|_{z=0} = 0$。

□

例 4.2. 计算 $I = \int_{|z|=2} \frac{1}{(z^3-1)(z+4)^2}\,\mathrm{d}\, z$。

解. 取 $R > 0$ 很大，那么

$$\int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}\, z}{(z^3-1)(z+4)^2} - I = \left(\frac{1}{z^3-1}\right)'\Bigg|_{z=-4} \cdot 2\pi i = -\frac{32}{1323}\pi i,$$

$$\int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}\, z}{(z^3-1)(z+4)^2} = \int_{|z|=R} O(\frac{1}{R^5})|\,\mathrm{d}\, z| = O(\frac{1}{R^4}) = 0,\ R \to +\infty.$$

□