Lec7 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 28 日

定理 2.2. 设 $f\colon D\to\mathbb{C}$ 全纯，γ 是 D 中的可求长简单闭曲线，γ 的内部包含在 D 中，则 $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$。

证明. 由定理 2.1 知，当 γ 为多边形时结论成立，故只需证：

引理：对 $\forall\,\varepsilon>0$，存在 D 中的多边形 P $s.t.$

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_P f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|<\varepsilon.$$

引理证明：γ 为紧集且 $\gamma\cap\partial D=\varnothing$，故 $\rho=d(\gamma,\partial D)>0$。构造有界开集 G，$\gamma\subset G\subset\overline{G}\subset D$，$f$ 在 $\overline{G}$ 上连续，故对 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0$，当 $z_1,z_2\in\overline{G}$，且 $|z_1-z_2|<\delta$ 时，则 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon/2L,\ (L=|\gamma|)$。

记 $\rho'=d(\gamma,\partial G)>0$，取 $\eta=\min(\rho',\delta)$，在 γ 上依次取点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ $s.t.$ $|\widehat{z_{k-1}z_k}|<\eta$，连接 z_{k-1},z_k，得到多边形 P，包含在 G 中。记 $\gamma_k=\widehat{z_{k-1}z_k}$，$P_k=\overline{z_{k-1}z_k}$，则

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_{P_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|&\le\left|\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_{\gamma_k} f(z_{k-1})\,\mathrm{d}\,z\right|+\left|\int_{P_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_{P_k} f(z_{k-1})\,\mathrm{d}\,z\right|\\&\le\int_{\gamma_k}|f(z)-f(z_{k-1})||\,\mathrm{d}\,z|+\int_{P_k}|f(z)-f(z_{k-1})||\,\mathrm{d}\,z|\\&\le\frac{\varepsilon}{2L}\cdot|\gamma_k|+\frac{\varepsilon}{2L}|P_k|<\frac{\varepsilon}{L}\cdot|\gamma_k|.\end{aligned}$$

从而

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_P f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|\le\sum_{k=1}^n\frac{\varepsilon}{L}\cdot|\gamma_k|=\varepsilon.$$

□

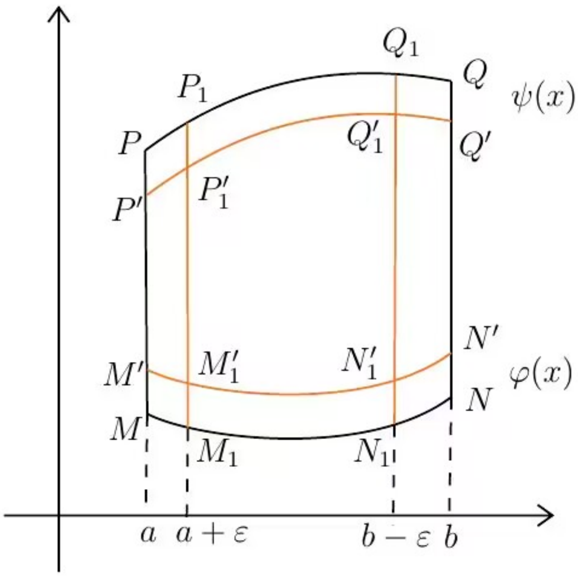
例 2.1. 注意 γ 的内部必须包含在 D 中。例如 $f(z)=\frac{1}{z},\ z\in D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$，我们熟知其绕 0 积分不为零，而 0 也不在 D 的内部。

定理 2.3. 设 D 是可求长简单闭曲线 γ 的内部。若 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$($f$ 在 D 中全纯且连续到边界)，则 $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$。

证明. 先证明当 D 具有如下形状时定理成立：$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$，$\varphi,\psi$ 连续。

设图形边界的顶点从左下角以逆时针顺序依次为 M,N,Q,P，设 $M'N'$ 为 $y=\varphi(x)+\eta$，$P'Q'$ 为 $y=\psi(x)-\eta$，并考虑 $M_1'P_1',\ M_1P_1$ 为 $x=a+\varepsilon$，$N_1'Q_1',\ N_1Q_1$ 为 $x=b-\varepsilon$，

且 $M_1'P_1'$, $N_1'Q_1'$ 介于 $M'N'$, $P'Q'$ 之间，M_1P_1, N_1Q_1 介于 MN, PQ 之间。$\varepsilon, \eta > 0$ 很小。



由定理 2.2，$\int_{M_1'N_1'Q_1'P_1'M_1'} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$。

固定 $\varepsilon > 0$，当 $\eta \to 0$ 时，

$$\int_{M_1'N_1'} f(z)\,\mathrm{d}\,z \to \int_{M_1N_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z, \ \int_{P_1'Q_1'} f(z)\,\mathrm{d}\,z \to \int_{P_1Q_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z.$$

这是因为 f 在 $\overline{D}$ 上连续。

$$\int_{P_1'M_1'} f(z)\,\mathrm{d}\,z \to \int_{P_1M_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z, \ \int_{Q_1'N_1'} f(z)\,\mathrm{d}\,z \to \int_{Q_1N_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z.$$

这是因为 f 有界且 $|P_1P_1'| \to 0$。

故 $\int_{M_1N_1Q_1P_1M_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$。

由于 $\varepsilon \to 0$ 时，$\int_{M_1N_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z \to \int_{MN} f(z)\,\mathrm{d}\,z$, $\int_{Q_1P_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z \to \int_{QP} f(z)\,\mathrm{d}\,z$。要证 $\int_{P_1M_1} f \to \int_{PM} f$, $\int_{N_1Q_1} f \to \int_{NQ} f$。记

$$y_\varepsilon := \max\{\varphi(b), \varphi(b-\varepsilon)\},$$
$$Y_\varepsilon := \min\{\psi(b), \psi(b-\varepsilon)\}.$$

由 NQ: $z(y) = b + iy$, $\varphi(b) \le y \le \psi(b)$，则

$$\int_{NQ} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b+iy)\,\mathrm{d}\,y = i\left(\int_{\varphi(b)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b)}\right) f(b+iy)\,\mathrm{d}\,y,$$

$$\int_{N_1Q_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{\psi(b-\varepsilon)} f(b-\varepsilon+iy)\,\mathrm{d}\,y = i\left(\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b-\varepsilon)}\right) f(b-\varepsilon+iy)\,\mathrm{d}\,y,$$

$$\left|\int_{NQ} f(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_{N_1Q_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| = i\int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} (f(b+iy) - f(b-\varepsilon+iy))\,\mathrm{d}\,y + \text{四项积分}.$$

这里两项均趋于 0，前者因为被积函数趋于 0，且积分区间有界；后者因为积分区间长

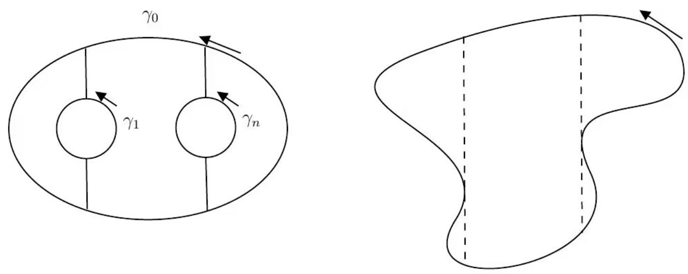
度趋于零，被积函数有界。 □

评论. 事实上一般用不到这么一般的定理。

甚至可以再一般一点：

定理 2.4. 如图所示，如果区域 D 的边界由简单可求长闭曲线 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 组成，$f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，记 $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \cdots \cup \gamma_n^-$，则 $\int_\gamma f = 0$，即

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z.$$



例 2.2. 设 γ 为可求长简单闭曲线，$a \notin \gamma$，求 $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\,z}{z-a}$。

解. (1) 若 a 在 γ 的外部，则 $\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}\,z$。

(2) 若 a 在 γ 的内部，则以 a 为圆心取逆时针圆周 γ_ε，由定理 2.4，

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\,z}{z-a} = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\,z}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon e^{i\theta} \cdot i\,\mathrm{d}\,\theta}{\varepsilon \cdot e^{i\theta}} = 2\pi i,\ \gamma(\theta) = a + \varepsilon e^{i\theta}.$$

□

评论. 从这个例子可以看出定理 2.4 可以帮助我们修正曲线形状以利于计算 (同学注)。

例 2.3. $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{|\,\mathrm{d}\,z|}{|z-a|^2}$, $(|a| \neq r)$。

解. $z(\theta) = re^{i\theta}$, $\mathrm{d}z = re^{i\theta} \cdot i\mathrm{d}\theta$, $|\mathrm{d}z| = r\mathrm{d}\theta = \frac{r}{iz}\mathrm{d}z$。从而

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=r} \frac{1}{|z-a|^2} \frac{r}{iz}\,\mathrm{d}\,z = \int_{|z|=r} \frac{-ir\,\mathrm{d}\,z}{(z-a)(\overline{z}-\overline{a})z} \\ &= \int_{|z|=r} \frac{-ir}{(z-a)(r^2-\overline{a}z)}\,\mathrm{d}\,z \\ &= \int_{|z|=r} \frac{(-i)\cdot r\,\mathrm{d}\,z}{(z-a)(r^2-|a|^2)} + \int_{|z|=r} \frac{(-i)\cdot \overline{a}r\,\mathrm{d}\,z}{(r^2-\overline{a}z)(r^2-|a|^2)} \\ &= \frac{2\pi r}{|r^2-|a|^2|}. \end{aligned}$$

无论 $|a| < r$ 还是 $|a| > r$。 □

例 2.4. $f \in C^1(D)$，则 f 在 D 上全纯 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall\, a \in D$ 有

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0.$$

证明. $\Rightarrow$：$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z \overset{Green}{=} \iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\,\overline{z} \wedge \mathrm{d}\,z$，或 Cauchy 积分定理。

$\Leftarrow$：设 $f(z) = u + iv$，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|=r} (u+iv)(\mathrm{d}\,x + i\,\mathrm{d}\,y)\\
=&\frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|=r} (u\,\mathrm{d}\,x - v\,\mathrm{d}\,y) + i(v\,\mathrm{d}\,x + u\,\mathrm{d}\,y)\\
=&\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-a|\le r} [(-u_y - v_x) + i(-v_y + u_x)]\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\\
\to&(-u_y - v_x) + i(u_x - v_y)|_{z=a}\ (r \to 0)
\end{aligned}$$

于是 f 满足 C-R 方程，从而全纯。 □