Lec3 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 24 日

Part III

Cauchy 积分理论

1 复变函数的积分

定义 1.1. 设曲线 γ: $z = z(t)$, $(a \le t \le b)$ 为可求长曲线，f 定义在 γ 上。若 Riemann 和 $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z(t_k) - z(t_{k-1}))$ 在 $|\pi| \to 0$ 时，有有限的极限且与分割 π 及 ζ_k 的选取无关，则称 f 在 γ 上**可积**，极限记为

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z.$$

若 $\lim\limits_{|\pi|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)|z(t_k) - z(t_{k-1})|$ 存在，记之为 $\int_\gamma f(z)|\,\mathrm{d}\,z|$。

设 f 在 γ 上连续，$f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, $z(t_k) = x_k + iy_k$，那么

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z(t_k) - z(t_{k-1}))\\
=&\sum_{k=1}^{n}(U(\xi_k,\eta_k) + iV(\xi_k,\eta_k))(\Delta x + i\Delta y)\\
=&\sum_{k=1}^{n}[(U\cdot\Delta x - V\cdot\Delta y) + i(V\cdot\Delta x + U\cdot\Delta y)]\\
\xrightarrow{|\pi|\to 0}&\int_\gamma(U\,\mathrm{d}\,x - V\,\mathrm{d}\,y) + i\int_\gamma(V\,\mathrm{d}\,x + U\,\mathrm{d}\,y).
\end{aligned}$$

命题 1.1. 设 $f = u + iv$ 在可求长曲线 γ 上连续，则

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_\gamma(u\,\mathrm{d}\,x - v\,\mathrm{d}\,y) + i\int_\gamma(v\,\mathrm{d}\,x + u\,\mathrm{d}\,y).$$

评论. $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$, $f(z)\mathrm{d}z = (u+iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i(v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)$。

若曲线是光滑的，则有

命题 1.2.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

证明.

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b (u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t)))\cdot(x'(t)+iy'(t))\,\mathrm{d}\,t\\
=&\int_a^b [(u\cdot x'(t) - v\cdot y'(t)) + i(v\cdot x'(t) + u\cdot y'(t))]\,\mathrm{d}\,t\\
=&\int_\gamma (u\,\mathrm{d}\,x - v\,\mathrm{d}\,y) + i\int_\gamma (v\,\mathrm{d}\,x + u\,\mathrm{d}\,y)\\
=&\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z.
\end{aligned}$$

□

评论. $\int_\gamma f(z)|\,\mathrm{d}\,z| = \int_a^b f(z(t))\cdot|z'(t)|\,\mathrm{d}\,t$。特别取 $f(z)\equiv 1$ 时，$|\gamma| = \int_\gamma |\,\mathrm{d}\,z| = \int_\gamma |z'(t)|\,\mathrm{d}\,t$。

例 1.1. 计算

$$I = \int_{|z-a|=r} \frac{\mathrm{d}\,z}{(z-a)^n},\ n\in\mathbb{Z}.$$

定向为逆时针。

解. 设 $z = a + re^{i\theta}$, $(0\le\theta<2\pi)$, $\mathrm{d}z = re^{i\theta}\cdot i\mathrm{d}\theta$，那么

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta}\cdot i\,\mathrm{d}\,\theta}{r^n e^{in\theta}} = \int_0^{2\pi} r^{1-n}e^{i(1-n)\theta} i\,\mathrm{d}\,\theta\\
&= r^{1-n} i\int_0^{2\pi} (\cos(1-n)\theta + i\sin(1-n)\theta)\,\mathrm{d}\,\theta = \begin{cases} 0, & n\ne 1,\\ 2\pi i, & n=1.\end{cases}
\end{aligned}$$

□

命题 1.3. 设 $D\subset\mathbb{C}$ 为区域，$f\colon D\to\mathbb{C}$ 连续且有原函数 $F(z)$(即 $F'(z)=f(z)$)，则对 D 中的任意光滑曲线 $\gamma\colon z=z(t)$ $(a\le t\le b)$，有

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = F(z(b)) - F(z(a)) = F(z(t))|_a^b$$

证明.

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}\,t\\
=&\int_a^b (F(z(t)))'\,\mathrm{d}\,t = F(z(t))|_a^b.
\end{aligned}$$

□

例 1.2.

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma 1\,\mathrm{d}\,z = z(t)|_a^b = z(b)-z(a),\\
&\int_\gamma z\,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{2}z^2(t)|_a^b = \frac{1}{2}(b^2-a^2),\\
&\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z = 2\pi i.
\end{aligned}$$

于是我们获知 $f(z)=\frac{1}{z}$ 在 $|z|=1$ 的邻域中无原函数，因为积分一圈不为零。

定理 1.4. 设 f,g 在可求长曲线 γ 上连续，则

(1) $\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}\,z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z$，$\gamma^-$ 是与 γ 反向的曲线。

(2) $\int_\gamma(\alpha f(z)+\beta g(z))\,\mathrm{d}\,z = \alpha\int_\gamma f+\beta\int_\gamma g$。

(3) $\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z+\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z$。

(4) *(*)*$|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z| \le \int_\gamma |f(z)|\cdot|\,\mathrm{d}\,z|$*(绝对值不等式)*。

证明. (4)

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z(t_k)-z(t_{k-1}))\right| \le \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)|\cdot|z(t_k)-z(t_{k-1})|.$$

□

推论. 设 γ 的长度为 L，$M=\sup\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$，则

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le M\cdot L.$$

称为**长大不等式**。

例 1.3. 设 f 在 $\overline{D}\setminus\{a\}$ 上连续。证明：若 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=A$，则

$$\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\alpha A$$

这里 Γ_r 为逆时针张开 α 角且半径为 r 的圆弧。

证明. 设 $(z-a)f(z)=A+\varphi(z)$, $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)=0$，那么

$$\begin{aligned}
&f(z)=\frac{A}{z-a}+\frac{\varphi(z)}{z-a}\\
\Rightarrow &\int_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{\Gamma_r}\frac{A}{z-a}\,\mathrm{d}\,z+\int_{\Gamma_r}\frac{\varphi(z)}{z-a}\,\mathrm{d}\,z.
\end{aligned}$$

而 $\int_{\Gamma_r}\frac{A}{z-a}\,\mathrm{d}\,z = i\alpha A$，

$$\left|\int_{\Gamma_r}\frac{\varphi(z)}{z-a}\,\mathrm{d}\,z\right| \le \int_{\Gamma_r}\frac{|\varphi(z)|}{|z-a|}|\,\mathrm{d}\,z| \le \sup_{z\in\Gamma_r}|\varphi(z)|\cdot\frac{alphar}{r}\to 0\ (z\to a).$$

□

例 1.4. 平面闭曲线 γ 围成的图形的面积 $S=\frac{1}{2i}\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}\,z$。

证明.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}\,z &= \frac{1}{2i}\int_\gamma (x-iy)(\mathrm{d}\,x+i\,\mathrm{d}\,y)\\ =&\frac{1}{2i}\left[\int_\gamma (x\,\mathrm{d}\,x+y\,\mathrm{d}\,y)+i\int_\gamma(-y\,\mathrm{d}\,x+x\,\mathrm{d}\,y)\right]\\ \overset{\text{Green}}{=}&\frac{1}{2i}i\iint_S 2\,\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y=S.\end{aligned}$$

□

评论. $\mathrm{d}\overline{z}\wedge\mathrm{d}z=(\mathrm{d}x-i\mathrm{d}y)\wedge(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)=2i\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$。

2 Cauchy 积分定理

定理 2.1. *(Goursat)*：*设 D 为区域，$f\colon D\to\mathbb{C}$ 全纯，若 γ 为 D 中的三角形的边界，且 γ 的内部包含在 D 中，则 $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$。*

证明. 设 $\gamma^{(0)}=\gamma$，我们作出三角形的三条中线，将三角形划分成四个更小的三角形，取逆时针，记为 $\gamma_i^{(1)}$，$1\le i\le 4$。那么

$$\left|\int_{\gamma^{(0)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| = \left|\sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le 4\max_{1\le i\le 4}\left|\int_{\gamma_i^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|.$$

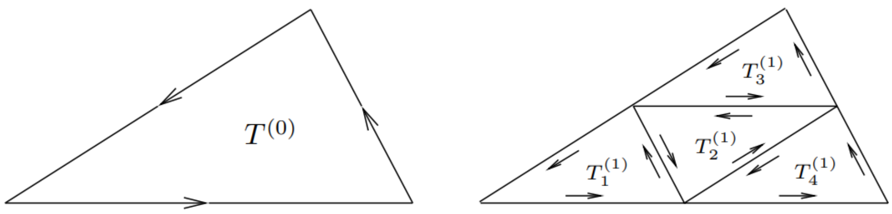

图 1: 三角形的二分

故存在某个 $\gamma_i^{(1)}$ 使得 $|\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}\,z|\le 4|\int_{\gamma_i^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z|$。记 $\gamma_i^{(1)}$ 为 $\gamma^{(1)}$，依次选取 $\gamma^{(2)},\gamma^{(3)},\cdots$，满足

$$\left|\int_{\gamma^{(j)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le 4\left|\int_{\gamma^{(j+1)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|.$$

用 Δ_n 表示 $\gamma^{(n)}$ 所围的闭三角形，那么

(1) $\Delta_0\supset\Delta_1\supset\Delta_2\supset\cdots$；

(2) $\mathrm{diam}\Delta_n\to 0$；

(3) $|\gamma^{(n)}|=\frac{L}{2^n}$，$L=|r^{(0)}|$；

(4) $|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z|\le 4^n|\int_{\gamma^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z|$。

由闭集套定理，存在唯一的 $z_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n \in D$，故 f 在 z_0 处可微，于是

$$
\begin{aligned}
& f(z)-f(z_0)=f'(z_0)\cdot(z-z_0)+\varphi(z)\cdot(z-z_0)\ \left(\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=0\right) \\
\Rightarrow & \left|\int_{\gamma^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| = \left|\int_{\gamma^{(n)}} f(z_0)\,\mathrm{d}\,z+\int_{\gamma^{(n)}} f'(z)(z-z_0)\,\mathrm{d}\,z+\int_{\gamma^{(n)}} \varphi(z)(z-z_0)\,\mathrm{d}\,z\right| \\
& \qquad \le \int_{\gamma^{(n)}} |\varphi(z)||z-z_0||\,\mathrm{d}\,z| \le \sup_{z\in\gamma^{(n)}} |\varphi(z)||\gamma^{(n)}|\cdot|\gamma^{(n)}| = \frac{L^2}{4^n}\sup_{z\in\gamma^{(n)}}|\varphi(z)| \\
\Rightarrow & \left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le \sup_{z\in\gamma^{(n)}}|\varphi(z)|\cdot L^2 \to 0\ (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

□