Lec3 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 21 日

我们回忆复数绕 $\mathrm{Log}z$ 的支点旋转一周时，其值无法回到初始值。为了避免这种旋转发生，我们将支点连接，称为**割线**。

考虑 $\mathrm{Log}z$ 的单值分支时，我们将其记为 $\log z$。

例 4.1. 考虑函数 $f(z) = \log(z-a) + \log(z-b) = \log|z-a| + \log|z-b| + i(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot 2k\pi$, $(a \neq b)$，那么 a, b 为支点，∞ 不是支点。

对于函数 $f(z) = \log(z-a) + \log(z-b) - \log(z-c)$，支点为 a, b, c, ∞。

4.3 幂函数

考虑 $f(z) = z^\mu$, $\mu = a + ib \in \mathbb{C}$。这里定义

$$z^\mu = e^{\mu \log z} = e^{\mu(\log|z| + i\theta + i\cdot 2k\pi)} = e^{\mu \log|z|} \cdot e^{i\cdot\mu\theta} \cdot e^{i\cdot\mu\cdot 2k\pi}.$$

(1) 若 $\mu = n \in \mathbb{Z}^+$，此时函数是单值的。将辐角增大 n 倍，模变为原来的 n 次方。

(2) 若 $\mu = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$，则 $z^{\frac{1}{n}}$ 为 $n-$ 值函数。

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}},\ (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

当 $k = 0$ 时，$z^{\frac{1}{n}}$ 称为**主支**，记为 $\sqrt[n]{z}$。

(3) 一般情况下，$\mu = a + ib$，则

$$\begin{aligned} z^\mu &= e^{\mu \log z} = e^{(a+ib)(\log|z| + i\theta + i\cdot 2k\pi)} \\ &= e^{a\log|z| - b(\theta + 2k\pi)} e^{i(b\log|z| + a\theta + 2k\pi a)}. \end{aligned}$$

1° 若 $b = 0$, $a = n \in \mathbb{Z}$，是单值的。

2° 若 $b = 0$, $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$，为 $q-$ 值的。

3° 若 $b = 0$, $a \notin \mathbb{Q}$，则函数有无穷多值。

4° $b \neq 0$，函数有无穷多值。

例 4.2. $i^i = e^{i\log i} = e^{i[\log|i| + (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i]} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$, $(k \in \mathbb{Z})$。

例 4.3. 设 $f(z) = \sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}} \cdot (z+1)^{-1}$，设 f 在 $[0,1]$ 的上岸取正值的单值全纯分支为 f_0，计算 $f_0(-i)$。

解.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z+1}\cdot e^{\frac{3}{2}\mathrm{Log}(1-z)-\frac{1}{2}\mathrm{Log}z} \\
&= \frac{1}{z+1}\cdot e^{\frac{3}{2}\log|1-z|-\frac{1}{2}\log|z|+i(\frac{3}{2}\mathrm{Arg}(1-z)-\frac{1}{2}\mathrm{Arg}z)}.
\end{aligned}
$$

记 $g(z)=i(\frac{3}{2}\mathrm{Arg}(1-z)-\frac{1}{2}\mathrm{Arg}z)$，当 z 绕 0 一周时，$g(z)$ 的值域增加 $-\pi i$，故 $z=0$ 为支点。

z 绕 $z=1$ 一周时，$g(z)$ 增加 $i\times\frac{3}{2}\times 2\pi=3\pi i$，$z=1$ 为支点。

z 绕 ∞ 一周时，$g(z)$ 增加 $3\pi i-\pi i=2\pi i$，而 $e^{2\pi i}=1$，故 ∞ 不是支点。

当 z 位于 $[0,1]$ 上岸时，取 $\mathrm{Arg}(z)=0$，$\mathrm{Arg}(1-z)=0$，当 $z=-i$ 时，$\mathrm{Arg}z=\frac{3\pi}{2}$，$\mathrm{Arg}(1-z)=\frac{\pi}{4}$。

$$
f_0(-i)=\frac{1}{-i+1}\cdot e^{\frac{3}{2}\log|1+i|-\frac{1}{2}\log|-i|+i(\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{2})}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}\log 2-\frac{1}{8}\pi}.
$$

□

4.4 三角函数

定义：

$$
\begin{aligned}
\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}),\ \tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\\
\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}),\ \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}.
\end{aligned}
$$

有

(1) $\sin z,\cos z$ 为**整函数** (在 $\mathbb{C}$ 上全纯)。

(2) $\sin z,\cos z$ 以 2π 为周期。

(3) $\cos(-z)=\cos z$，$\sin(-z)=-\sin z$。

(4) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$，$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$。

(5) $\cos^2 z+\sin^2 z=1$，$\sin 2z=2\sin z\cos z$。

(6) $\sin z=0\Leftrightarrow z=k\pi$，$(k\in\mathbb{Z})$，$\cos z=0\Leftrightarrow z=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$(k\in\mathbb{Z})$。

(7) $\sin z$，$\cos z$ 是无界函数。

例 4.4. 求一保角变换，将除去线段 $\{z=a+iy\mid 0<y<h\}$ 的上半平面变为上半平面。

解. 依次施加 $z-a$，z^2，$z+h^2$，$\sqrt{z}$ 的操作即可。此时空线段先被向左平移到虚轴上，然后被旋转到负实轴上，再被向右平移到正实轴上，最后左右张开。 □

例 4.5. 求带状区域 $\{x+iy\mid x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ y\geq 0\}$ 在 $\sin z$ 下的像。

解.

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=-\frac{1}{2}(ie^{iz}-ie^{-iz}) \\
&= -\frac{1}{2}(ie^{iz}+\frac{1}{ie^{iz}}).
\end{aligned}
$$

进而依次考虑在 $iz, e^z, iz, -\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ 映射下的像。 $\square$

我们知道 $\sin z$ 并非单值函数，但我们可以选取定义域使其为单值的，上例就是下图的部分情况：

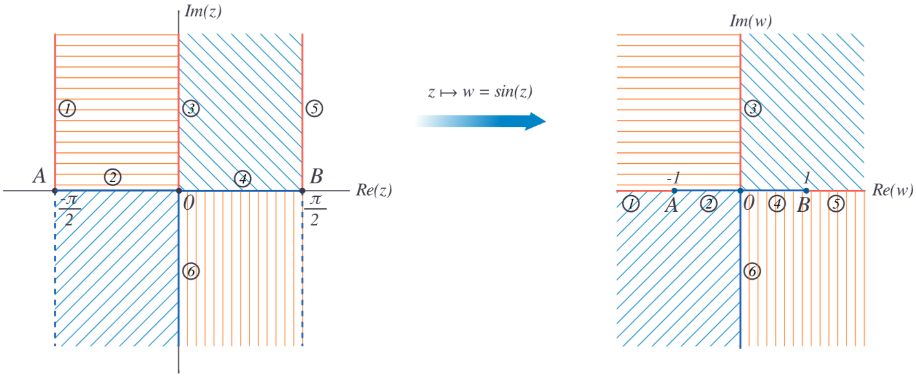

图 1: $\sin z$ 的像