Lec3 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 21 日

3 导数的几何意义

我们考虑复平面上的一段曲线 $\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{C}$，那么 $\gamma'(t)\mathrm{d}t$ 代表着曲线在 t 处的切向量。若有一全纯函数 f 作用在曲线上，得到一段新的曲线 $f\circ\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{C}$，那么其在 t 处的切向量为：

$$(f\circ\gamma(t))'\mathrm{d}t = f'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

观察等式右端，$\gamma'(t)\mathrm{d}t$ 为原曲线在 t 处的切向量，而 $f'(\gamma(t))$ 可以认为是向量前后变化的复数倍率，即一方面使得向量逆时针旋转 $\arg f'(\gamma(t))$ 的角度，另一方面使得向量放缩 $|f'(\gamma(t))|$ 的倍率。

进而我们可以预测，如果有两条曲线 $\gamma_1(t),\gamma_2(t)$ 在 t 处相交，切向量在 t 处有一夹角 $\angle A$。那么在全纯函数 f 的作用下，新的曲线 $f\circ\gamma_1(t), f\circ\gamma_2(t)$ 在 t 处的切向量夹角为 $\angle B$，于是应该有

$$\angle A = \angle B.$$

这称为全纯函数的**保角性**。进而一个微三角形在变化前后应当相似，这称为**共形性**。

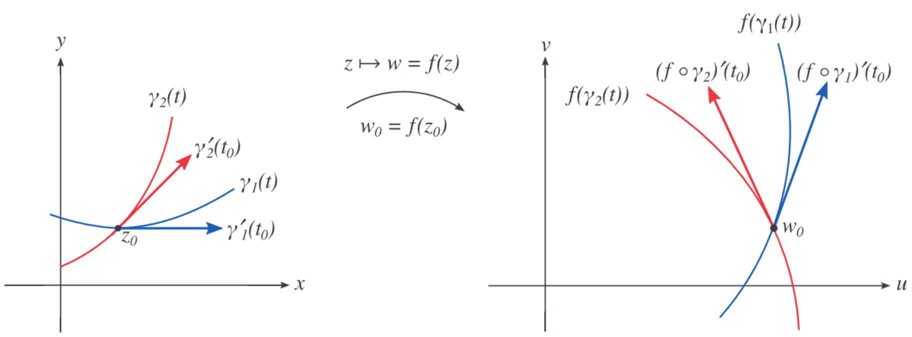

图 1: 全纯映射将一点处的所有切向量旋转放缩相同的倍率

下面是一个例子。

例 3.1. 考虑 $u+iv=w=f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$。

则在 uv 平面中一条竖直的线，对应 xy 平面中的双曲线。水平的线亦对应双曲线。且交点处的正交性被保持。

设 $w = f(z) = u + iv$，则

$$\mathcal{J}f = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2.$$

为面积的伸缩比。若 $f\colon D \to \Omega$ 为全纯双射，则

$$\mathrm{Area}(\Omega) = \iint_D |f'(z)|^2 \cdot \mathrm{d}\,\sigma.$$

例 3.2. (P50.3)$f\colon B(0,1) \cup \{1\}$ 全纯，$f(B(0,1)) \subset B(0,1)$，$f(1) = 1$。证明：$f'(1) \geq 0$。

证明. 从几何的角度看，考虑在 1 处取一个更小的内切圆，圆弧在 1 处的切向量竖直。设 $\theta = \arg f'(1) > 0$，那么我们考虑从内切圆下半圆弧趋近 1，此时切向量被逆时针旋转 θ 角而进入圆的内部，意味着圆弧必然被映射到 $B(0,1)$ 外，这与题意矛盾。类似地，若 $\arg f'(1) < 0$，则从上半圆弧趋近之，同样导出矛盾。

于是 $f'(1)$ 是实数，若 $f'(1) < 0$，则考虑从实轴上趋于 1 的一条曲线，其切向量被映为指向实轴负向的向量，与上面的矛盾类似。从而 $f'(1) \geq 0$。 □

4 初等函数

4.1 指数函数

设 $z = x + iy$，则

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y).$$

此时 $U(x,y) = e^x \cos y$, $V(x,y) = e^x \sin y$，满足 C-R 方程。

(1) $(e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$；

(2) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$；

(3) $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$；

(4) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$；

也可定义 $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$，则更为严谨，此时上面的性质均为计算验证。

注意到

$$\begin{aligned} e^{z_1} = e^{z_2} &\Leftrightarrow \mathrm{Re} z_1 = \mathrm{Re} z_2,\ \mathrm{Im} z_1 = \mathrm{Im} z_2 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

于是我们只需在 $\mathbb{C}$ 的一个条带状区域上观察 e^z 的行为，将带形区域映为扇形区域：

定义 4.1. 设 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ 全纯，如果在 $D \subset \Omega$ 且 $f|_D$ 是单射，则称 $f|_D$ 为**单叶全纯的 (Univalent)**，D 称为 f 的一个**单叶性域**。

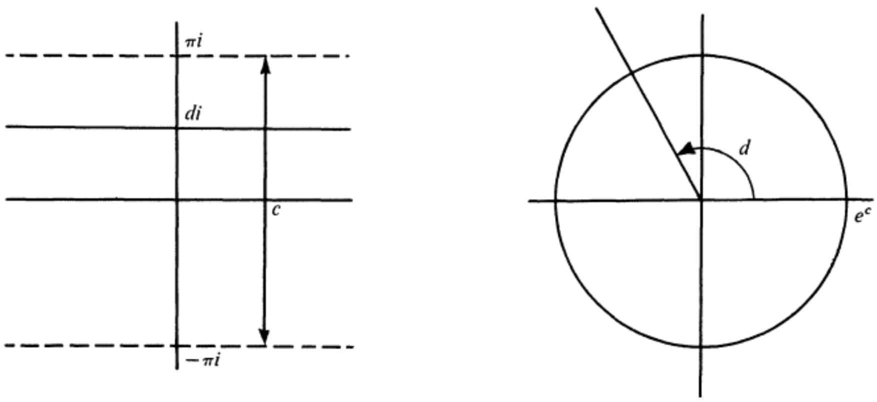

图 2: e^z 的作用

4.2 对数函数

设 $z \neq 0$，若 $e^w = z$，则称 w 为 z 的指数，记为 $\mathrm{Log} z$。

注意，$\mathrm{Log} z$ 是多值函数：$z = re^{i\theta}$, $w = x + iy \Rightarrow \begin{cases} e^x = r, \\ y = \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ 。从而我们可以给出 $\mathrm{Log} z$ 的表达式：

$$\mathrm{Log} z = \log|z| + i\theta + 2k\pi i \ (\theta = \arg z \in (-\pi, \pi]), \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

固定 $k \in \mathbb{Z}$，$w_k(z) = \log|z| + i\theta + 2k\pi i$。虽然在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 中有定义，但是它在 $(-\infty, 0)$ 上不连续。然而在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上它是全纯的。

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \ \frac{\partial V}{\partial r} = 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

多值函数的支点　当 z 绕某点一周时，多值函数 (为保持连续性) 回不到初始值，该点称为**支点**。

例如，$0, \infty$ 为 $\mathrm{Log} z$ 的支点。

评论. 可以证明：若 $D \in \mathbb{C}$ 为单连通区域，且 $0 \notin D$。则存在全纯函数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ 满足 $e^{f(z)} = z$，即在 D 中 $\mathrm{Log} z$ 有单值分支。