Lec3 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 14 日

例 2.1. (1) $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}=\overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}$, 同样地, 若将 $f(z)$ 视作 $f(z,\overline{z})$, g 视作 $g(z,\overline{z})$, 那么 $(g\circ f)(z,\overline{z})=g(f(z,\overline{z}),\overline{f(z,\overline{z})})$。

(2) $\frac{\partial}{\partial z}(g\circ f)(z)=\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\cdot\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(g\circ f)(z)=\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\cdot\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$。

注意到我们也可以将 f 如下表示：

$$f(z)=f(x+iy)=U(x,y)+iV(x,y).$$

那么 f 全纯则应当满足 C-R 方程 $\begin{cases}U_x=V_y,\\ U_y=-V_x\end{cases}$ 。

例 2.2. 设 $f\colon D\to\mathbb{C}$ 全纯且 $\forall\, z\in D$, $f'(z)=0$，则 $f=$ 常数。

证明.

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\cdots=U_x+iV_x=0$$

$$\Rightarrow U_x\equiv 0,\ V_x\equiv 0\Rightarrow U_y\equiv 0,\ V_y\equiv 0\Rightarrow U,V=\text{const}.$$

□

例 2.3. 设 $f\colon D\to\mathbb{C}$ 全纯且 $|f|=$ 常数，则 f 为常数。

证明. 不妨考虑常数不为零的情况 (否则平凡),

$$U^2+V^2=c\neq 0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2U\cdot U_x+2V\cdot V_x=0,\\ 2U\cdot U_y+2V\cdot V_y=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(U^2+V^2)U_x=0$$

$$\Rightarrow U_x\equiv 0.$$

类似地，$V_x\equiv 0,\ U_y\equiv 0,\ V_y\equiv 0$。从而 f 为常数。 □

记

$$C^k(D)=\{f\colon D\to\mathbb{C}\mid U(x,y),V(x,y)\in C^k(D)\},\ (k=0,1,\cdots,\infty)$$

$$H(D)=\{f\colon D\to\mathbb{C}\mid f\text{在}D\text{上全纯}\}$$

评论. 由于 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则 $f(z)$ 也可以视作 r,θ 的函数：$f(z)=U(r,\theta)+iV(r,\theta)$。于是可以得到

$$f(z)\text{全纯}\Leftrightarrow\begin{cases}U_r=\frac{1}{r}V_\theta,\\ V_r=-\frac{1}{r}U_\theta.\end{cases}$$

同样你也可以认为 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，那么

$$f(z)=U(x,y)+iV(x,y)=U(r\cos\theta,r\sin\theta)+iV(r\cos\theta,r\sin\theta)$$
$$U_r=U_x\cdot\cos\theta+U_y\cdot\sin\theta,\ U_\theta=U_x\cdot(-r\sin\theta)+U_y\cdot r\cos\theta,$$
$$V_r=V_x\cdot\cos\theta+V_y\cdot\sin\theta,\ V_\theta=V_x\cdot(-r\sin\theta)+V_y\cdot r\cos\theta.$$

于是我们推断

$$f(z)\text{全纯}\Leftrightarrow\begin{cases}U_x=V_y,\\ U_y=-V_x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}U_r=\frac{1}{r}V_\theta,\\ V_r=-\frac{1}{r}U_\theta\end{cases}.$$

定理 2.2. 设 $f=U+iV\in H(D)$ 且 $U,V\in C^2(D)$，则 U,V 为调和函数。

证明.

$$\Delta U=U_{xx}+U_{yy}=(V_y)_x+(-V_x)_y=0$$

类似有 $\Delta V=0$。 □

定义 2.2. 设 U,V 为区域 D 上的调和函数。若 $U+iV\in H(D)$，则称 V 为 U 的**共轭调和函数**。

评论. 注意，$U+iV\in H(D)$ 和 $V+iU\in H(D)$ 并不等价。

定理 2.3. *(*)*[1]设 U 为单连通区域 D 上的调和函数，则 U 存在共轭调和函数。

证明. 欲构造 $V(x,y)$ $s.t.$ $V_x=-U_y,\ V_y=U_x$。

令

$$V(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-U_y\,\mathrm{d}\,x+U_x\,\mathrm{d}\,y.$$

首先我们要说明这个记号是有意义的。

$$\begin{aligned}\oint_L -U_y\,\mathrm{d}\,x+U_x\,\mathrm{d}\,y&\overset{Green}{=}\iint \mathrm{d}(-U_y\,\mathrm{d}\,x+U_x\,\mathrm{d}\,y)\\&=\iint(-U_{yy})\,\mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,x+U_{xx}\,\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y\\&=\iint(U_{yy}+U_{xx})\,\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y\\&=0.\end{aligned}$$

[1]打星号表示很重要。

所以 $V(x,y)$ 是良定义的 (不依赖于路径选取)。于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \lim_{h\to 0}\frac{V(x+h,y)-V(x,y)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_L -U_y\,\mathrm{d}\,x+U_x\,\mathrm{d}\,y}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} -U_y\,\mathrm{d}\,x}{h} = -U_y(x,y).\end{aligned}$$

同理 $\frac{\partial V}{\partial y}=U_x$。 □

定理 2.4. 设 $U\in C^2(D)$，$U=U(x,y)=U(z,\overline{z})$，则 $\Delta U = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\overline{z}}$。

证明.

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial U^2}{\partial z\partial\overline{z}} &= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right)-i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]\\ &= \frac{1}{4}\Delta U.\end{aligned}$$

□

例 2.4. D 为区域，$f\colon D\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 全纯，证明 $\log|f(z)|$[2]在 D 上为调和函数。

证明.

$$\begin{aligned}\Delta\log|f(z)| &= 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}\log|f(z)|,\\ \frac{\partial}{\partial z}\log|f(z)| &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\log(f\cdot\overline{f}) = \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial z}\overline{f}+f\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}}{f\cdot\overline{f}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{f},\\ \frac{\partial^2}{\partial\overline{z}\partial z}\log|f(z)| &= \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial\overline{z}\partial z}f-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}}{f^2} = 0.\end{aligned}$$

□

例 2.5. 设 $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$(非单连通)，$U(z)=\log|z|$，则 $U(z)$ 调和，但是不存在 u 的共轭调和函数。

证明. 用反证法。假设 $\exists\, V$ $s.t.$ $f=U+iV$ 全纯。令 $g(z)=\log|z|+i\arg z$，$z\in D'=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\subset D$，则 $g(z)$ 在 D' 中全纯。

于是 $f(z)-g(z)$ 在 D' 上全纯，且 $\mathrm{Re}(f(z)-g(z))\equiv 0\Rightarrow f(z)-g(z)=$ 常数 $=c$。故 $f(z)=\log|z|+i\arg z+c$，$z\in D'$。那么

$$f(-1)=\lim_{y\to 0^+}f(-1+iy)=i\pi+c.$$

但另一方面，也应该有

$$f(-1)=\lim_{y\to 0^+}f(-1-iy)=-i\pi+c.$$

故矛盾。 □

[2]这里的 log 就是自然对数 ln。