Lec26 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 6 月 1 日

例 12.1. 圆环 $D=\{z\in\mathbb{C}\mid r_1<|z|<r_2\}$ 和 $G=\{z\in\mathbb{C}\mid R_1<|z|<R_2\}$ 双全纯 (或共形) 等价 $\Leftrightarrow \frac{r_2}{r_1}=\frac{R_2}{R_1}$ 且双全纯 $f\colon D\to G$ 满足 $f(z)=e^{i\theta}\frac{R_2}{r_2}z$ 或 $f(z)=e^{-i\theta}\frac{r_1R_2}{z}$, $\theta\in\mathbb{R}$。

证明. $\Leftarrow$：显然。

$\Rightarrow$：设 $f\colon D\to G$ 为双全纯，由边界对应原理，f 将 $\overline{D}$ 同胚地映为 $\overline{G}$。设 f 将 $|z|=r_1$ 映为 $|z|=R_1$，取

$$D_1\colon \frac{r_1^2}{r_2}<|z|<r_1,\quad G_1\colon \frac{R_1^2}{R_2}<|z|<R_1,$$

由 S-对称原理，f 可以开拓到 $D\cup D_1\cup\{|z|=r_1\}$ 上，且将边界映为边界，继续这个过程，f 可以全纯开拓到 $B(0,r_2)$，且 $f(0)=0$。故 $f(z)=e^{i\theta}\frac{R_2}{r_2}z$。

由于 $f(\partial B(0,r_1))=\partial B(0,R_1)$，故 $\frac{R_1}{R_2}=\frac{r_1}{r_2}$。

设 f 将 $|z|=r_1$ 映为 $|z|=R_2$，令 $g(z)=\frac{R_1R_2}{f(z)}$，则 $g(z)$ 将 $|z|=r_1$ 映为 $|z|=R_1$，故 $g(z)=e^{i\theta}\frac{R_2}{r_2}z\Rightarrow f(z)=e^{-i\theta}\frac{r_1R_2}{z}$。 □

评论. 拓扑等价与共形等价是有差异的。

13 幂级数的全纯开拓

设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 $R>0$，取 $\zeta\in\partial B(0,R)$ 在线段 $\overline{0\zeta}$ 上取点 $z_0\neq 0$，f 在 z_0 处的 Taylor 级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$，其收敛半径 $\rho\geq R-|z_0|$。

(1) 若 $\rho>R-|z_0|$，f 可以全纯开拓到更大的区域中，ζ 称为**正则点**。

(2) 若对 $\overline{0\zeta}$ 中每个点 z_0，$\rho=R-|z_0|$，称 ζ 为**奇点**。(与以前的孤立奇点不同)

例 13.1. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$, $R=1$ 且 $f(z)=\frac{1}{1-z}$ $(|z|<1)$。

设 $|z_0|<1$，$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{(1-z_0)^{n+1}}$，故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}},$$

其收敛半径 $\rho=|1-z_0|\geq 1-|z_0|$。故 $\zeta=1$ 是唯一的奇点。

定理 13.1. 幂级数的收敛圆周上必有奇点。

证明. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的 $R>0$ 且 $\partial B(0,R)$ 上无奇点，则对 $\forall\,\zeta\in\partial B(0,R)$，存在以 ζ 为中心的圆盘 B_ζ 及 B_ζ 上的全纯函数 f_s s.t. $f_\zeta(z)=f(z),\ z\in B(0,R)\cap B_\zeta$。$\{B_\zeta\mid\zeta\in\partial B(0,R)\}$ 为 $\partial B(0,R)$ 的开覆盖，从而有有限的子覆盖 $\{B_{\zeta_i}\mid i=1,2,\cdots,m\}$。

记 $D=B(0,R)\cup\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}B_{\zeta_i}\right)$，令

$$g(z)=\begin{cases}f(z), & z\in B(0,R),\\ f_{\zeta_i}(z), & z\in B_{\zeta_i},\end{cases}$$

g 是良定义的。$g(z)$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 级数的收敛半径 $>R$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$，矛盾。 □

例 13.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 的 $R=1$，在 $\partial B(0,1)$ 上处处收敛，但 $\partial B(0,1)$ 中有 (开拓意义下的) 奇点。

例 13.3. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{n!}$ 的收敛半径 $R=1$，$\partial B(0,1)$ 中每点都是奇点。

证明. 假设 $\exists\,\zeta_0\in\partial B(0,1)$ 为正则点，则 $\exists\,z_0\in\overline{0\zeta}$，且 f 在 z_0 处的 Taylor 级数 $g(z)$ 的收敛半径 $\rho>1-|z_0|$。由于形如 $\{e^{2\pi i\cdot\frac{p}{q}}\mid p,q$ 为整数且互素$\}$ 的点在 $|z|=1$ 上稠密，故 $\exists\,\zeta_1\in\partial B(0,1),\ \zeta_1=e^{2\pi i\cdot\frac{p}{q}}$，

$$g(\zeta_1)=\lim_{r\to1^-}g(r\zeta_1)=\lim_{r\to1^-}f(r\zeta_1)$$
$$f(r\zeta_1)=\sum_{n=0}^{q-1}r^{n!}\zeta_1^{n!}+\sum_{n=q}^{+\infty}r^{n!}.$$

对 $\forall\,N>q,\ \sum\limits_{n=q}^{+\infty}r^{n!}>\sum\limits_{n=q}^{N}r^{n!}>(N-q)r^{N!}$，当 $r\to1^-$ 时，$\sum\limits_{n=q}^{+\infty}r^{n!}$ 可以大于任何正整数 $\Rightarrow\lim\limits_{r\to1^-}f(r\zeta_1)=+\infty\Rightarrow g(\zeta_1)=+\infty$，矛盾。 □

14　完全解析函数与单值性定理 (Monodromy Theorem)

考虑幂级数 $p(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$，收敛半径 $R>0$，称这个幂级数为一个**解析元素**。若 $|a_1-a|<R$，则幂级数 $p_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p^n(a_1)}{n!}(z-a_1)^n$，其收敛半径 $R_1\geq R-|a_1-a|>0$，$p_1(z)$ 也是一个解析元素，称之为解析元素 $p(z)$ 的一个**直接开拓**。

假设有 m 个解析元素

$$p_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(k)}(z-a_k)^n\ (k=1,2,\cdots,m),$$

如果 $p_1(z)$ 是 $p(z)$ 的直接开拓，$p_{k-1}(z)$ 是 $p_k(z)$ 的直接开拓，$k=1,\cdots,m-1$，则称 p_m 是 $p(z)$ 的一个**解析开拓**。

定义 14.1. 一个解析元素 $p(z)$ 的全部解析开拓构成的集合称为由解析元素 $p(z)$ 所产生的**完全解析函数**。

评论. (1) $p(z)$ 的全部解析开拓所对应的收敛圆的并集称为这个完全解析函数的存在域 (定义域)，其边界称为自然边界。

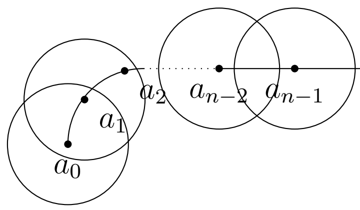
(2) 完全解析函数可能是多值函数。

设 $p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$，$\gamma$ 为从 a 到 b 的曲线。称 $p(z)$ 可以沿 γ 解析开拓，如果存在 γ 上的点列：$a_0=a,a_1,a_2,\cdots,a_{m-1},a_m=b$ 及一列解析元素 $p_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(k)}(z-a_k)^n$ $(k=0,1,\cdots,m-1)$ 满足：

(1) $p_0(z)=p(z)$；

(2) 曲线 $a_k\widehat{a_{k+1}}$ 位于 $p_k(z)$ 的收敛圆 C_k 中，$k=0,1,\cdots,m-1$；

(3) $p_k(z)$ 是 $p_{k-1}(z)$ 的直接开拓，$k=1,2,\cdots,m-1$。



评论. 沿着从 a 到 b 的两条不同路径解析开拓，在 b 处的值可能不相同。