Lec25 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 5 月 30 日

定理 11.2. 设 $f(z)$ 为整函数且没有零点，则存在整函数 $g(z)$ 使得 $f(z)=e^{g(z)}$。

设 $f(z)$ 只有有限多个零点 $0,a_1,a_2,\cdots,a_n$，重数分别为 $m,m_1,\cdots,m_n$，则令

$$p(z)=z^m(z-a_1)^{m_1}\cdots(z-a_n)^{m_n}=Az^m\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{m_1}\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right).$$

则 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 为整函数且无零点，故存在整函数 $g(z)$s.t. $f(z)=e^{g(z)}p(z)$。

定理 11.3. *Weierstrass* 因子分解定理：设 $f(z)$ 为整函数，零点为 $0,\cdots,0,a_1,a_2,\cdots$, $(0<|a_1|\le|a_2|\le\cdots)$，则 $f(z)$ 可以表示为

$$f(z)=z^me^{h(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}}.$$

其中 $h(z)$ 为整函数。

证明. 记 $E_n=\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}}$。任取 $R>0$，取 N s.t. $n\ge N$ 时 $|a_n|>2R$ 且 $n<N$ 时 $|a_n|\le 2R$。

$$\prod_{n=1}^{\infty}E_n=e^{\log\left(\prod_{n=1}^{\infty}E_n\right)}=e^{\sum_{n=1}^{\infty}\log E_n},$$

$$\log E_n=\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+\left[\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}\right].$$

当 $|z|\le R$ 且 $n\ge N$ 时 $\left|\frac{z}{a_n}\right|\le\frac{R}{2R}=\frac{1}{2}$，故

$$\begin{aligned}\log E_n&=\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{m}\left(\frac{z}{a_n}\right)^m\right)+\left[\frac{z}{a_n}+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}\right]\\&=\sum_{m=n}^{\infty}\left(-\frac{1}{m}\left(\frac{z}{a_n}\right)^m\right)\\|\log E_n|&\le\left|\frac{z}{a_n}\right|^n\left(1+\left|\frac{z}{a_n}\right|+\left|\frac{z}{a_n}\right|^2+\cdots\right)\\&=\left|\frac{z}{a_n}\right|^n\left(\frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_n}\right|}\right)\le 2\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

故 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}\log E_n$ 在 $|z|\le R$ 中一致收敛 $\Rightarrow\prod\limits_{n=N}^{\infty}E_n$ 在 $|z|\le R$ 中全纯 $\Rightarrow\prod\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 在 $|z|\le R$ 中全纯。由 R 的任意性，$\prod\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 在 $\mathbb{C}$ 中全纯且零点为 $a_1,a_2,\cdots\Rightarrow f(z)/z^m\prod\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 为无

零点的整函数。 $\square$

设 $f(z)$ 为非常数的整函数，记 $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$。

定义 11.1. 设 $f(z)$ 为整函数，若存在 $\lambda>0$ 使得对充分大的 $r>0$ 有 $M(r)<e^{r^\lambda}$，则称 $f(z)$ 有有限的增长阶数。称 $\rho=\inf\lambda$ 为 $f(z)$ 的**增长阶数**。

例 11.1. 设 $f(z)=a_mz^m+\cdots+a_1z+a_0\ (a_m\neq 0)$，对 $\forall\,\lambda>0,\ M(r)<Ar^m<e^{r^\lambda}$ (r 充分大时)$\Rightarrow\rho=0$。

例 11.2. $f(z)=e^{z^m},\ \rho=m$。

定理 11.4. 设 $f(z)$ 是增长阶数为 ρ 的整函数，$a_n\neq 0$ 为 $f(z)$ 的所有非零的零点，则对 $\forall\,\varepsilon>0$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}<+\infty.$$

(增长阶数与零点分布的关系)

证明. See the Chapter5 Section2 Theorem 2.1 (ii) of Stein《Complex Analysis》, page 138. $\square$

定理 11.5. *Hadamard*：设 $f(z)$ 为增长阶数为 ρ 的整函数，k 为正整数且 $k\leq\rho<k+1$。设 $a_n\neq 0$ 为 $f(z)$ 的所有非零的零点，则存在次数 $\leq k$ 的多项式 $h(z)$，使得

$$f(z)=z^me^{h(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)+\cdots+\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k}.$$

例 11.3. 设 $f(z)$ 为有限阶整函数，则 $f(z)$ 可以取到每一个有穷复数，至多可能有一个例外值。

证明. 设 $\exists\,\alpha\neq\beta$ 且 $f(z)\neq\alpha,\ f(z)\neq\beta,\ \forall\,z\in\mathbb{C}$，则 $f(z)-\alpha$ 无零点。由 H-定理，存在多项式 $h(z)$ s.t $f(z)-\alpha=e^{h(z)},\ e^{h(z)}\neq\beta-\alpha,\ \forall\,z\in\mathbb{C}$，即 $h(z)\neq\log(\beta-\alpha),\forall\,z\in\mathbb{C}$，与代数学基本定理矛盾。 $\square$

例 11.4. 将 $f(z)=\sin(\pi z)$ 展开为无穷级数。

解. 按定义 $\sin(\pi z)=\frac{1}{2i}(e^{\pi iz}-e^{-\pi iz})$，而 $|e^z|\leq e^{|z|}$，故 $|\sin\pi z|\leq\frac{1}{2}(e^{\pi|z|}+e^{\pi|z|})=e^{\pi|z|}$，故 $M(r)\leq e^{\pi r}\Rightarrow\rho\leq 1$。

另一方面 $|\sin\pi ir|=\frac{1}{2}(e^{\pi r}-e^{-\pi r})>\frac{1}{4}e^{\pi r}$ (r 充分大时)。故 $M(r)>\frac{1}{4}e^{\pi r}\Rightarrow\rho=1$。

而 $\sin(\pi z)$ 的零点为 $0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n$，由 H-定理，取 $k=1$，

$$\sin\pi z=z^1\cdot e^{Az+B}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\left(1-\frac{z}{-n}\right)e^{\frac{z}{-n}}\right]=ze^{Az+B}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

而 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin(\pi z)}{z}=\pi=e^B\Rightarrow e^B=\pi$，把 z 换成 $-z$，得 $e^{-Az+B}=e^{Az+B}\Rightarrow A=0$。

故 $\sin(\pi z)=\pi z\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$。 $\square$

Part VI

全纯开拓

定义 11.2. 设 $f\colon G \to \mathbb{C}$ 全纯，若存在 $D \supsetneq G$ 及全纯函数 $F\colon D \to \mathbb{C}$，且 $F|_G = f$，则称 F 为 f 的一个**全纯开拓**。

例 11.5. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \ (|z| < 1)$, $F(z) = \frac{1}{1-z}$, $(z \neq 1)$，则 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的全纯开拓。

12 Schwarz 对称原理

定理 12.1. *Painlevé* 原理：设 D 是区域，$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 是 D 中的可求长曲线，如果 f 在 D 上连续，在 $D \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} \gamma_k$ 上全纯，则 f 在 D 中全纯。

证明. Morera 定理。 □

定理 12.2. *Schwarz* 对称原理：设区域 D 关于实轴对称，如果 f 满足：

(1) f 在 $D^+ = D \cap \{z \mid \mathrm{Im} z \geq 0\}$ 中全纯；

(2) f 在 $D \cap \{z \mid \mathrm{Im} z \geq 0\}$ 中连续；

(3) $f(D \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$，

则

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cap \{z \mid \mathrm{Im} \geq 0\}, \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in D^- \end{cases}$$

是 f 的全纯开拓。

证明. 设 $z \in D^-$，则 $\zeta = \overline{z} \in D^+$，

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \overline{f(\overline{z})} = \overline{\frac{\partial f(\overline{z})}{\partial z}} = \overline{\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}}} = 0.$$

□

对于 C_∞ 中的圆周 γ，用 $C_\infty^+(\gamma)$, $C_\infty^-(\gamma)$ 表示 C_∞ 被 γ 分割成的两个单连通区域。

定理 12.3. 推广的 *S*-对称原理：设 C_∞ 中的区域 D 关于圆周 γ 对称。如果 f 满足

(1) f 在 $D \cap C_\infty^+(\gamma)$ 全纯且连续到 γ 上；

(2) $f(D \cap \gamma) \subset \Gamma$，$\Gamma$ 为圆周 *(*以 w_0 为圆心*)*；

(3) 对 $\forall\, z \in D \cap C_\infty^+(\gamma)$, $f(z) \neq w_0$，

则 f 可以全纯开拓到 D 上的全纯函数 F，且 F 将 γ 的对称点映为 Γ 的对称点。