Lec24 Note of Complex Analysis

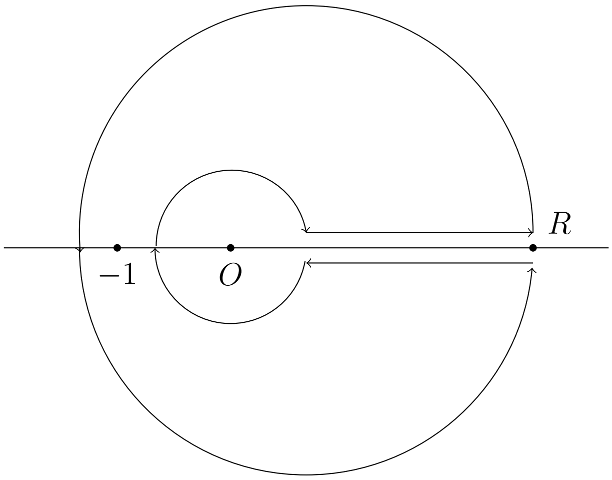
Xuxuayame

日期：2023 年 5 月 25 日

现在我们来讨论 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 型积分的计算方式。

例 10.6. $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}\,\mathrm{d}\,x,\ m\in\mathbb{N},\ p$ 不是整数且 $0<p<m$。

解. 令 $F(z)=\frac{z^{p-1}}{(1+z)^m}=\frac{e^{(p-1)\log z}}{(1+z)^m}$，取 $0<\rho<1<R$，如图选取围道：



在正轴上沿：$F(x)=\frac{e^{(p-1)(\log x+i\cdot 0)}}{(1+x)^m}=\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}$。

在正轴下沿：$F(x)=\frac{e^{(p-1)(\log x+i\cdot 2\pi)}}{(1+x)^m}=\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}e^{2\pi(p-1)i}$。

由留数定理，

$$\int_\rho^R\frac{x^{p-1}\,\mathrm{d}\,x}{(1+x)^m}+\int_{\gamma_R}F(z)\,\mathrm{d}\,z+\int_R^\rho\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}e^{2\pi(p-1)i}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\gamma_\rho}F(z)\,\mathrm{d}\,z=2\pi i\operatorname{Res}(F,-1),$$

$$\left|\int_{\gamma_R}F(z)\,\mathrm{d}\,z\right|\le\int_{\gamma_R}\frac{R^{p-1}}{(R-1)^m}|\,\mathrm{d}\,z|=2\pi\frac{R^p}{(R-1)^m}\to 0,\ (R\to+\infty)$$

$$\left|\int_{\gamma_\rho}F(z)\,\mathrm{d}\,z\right|\le\int_{\gamma_\rho}\frac{\rho^{p-1}}{(1-\rho)^m}|\,\mathrm{d}\,z|=2\pi\frac{\rho^p}{(1-\rho)^m}\to 0,\ (\rho\to 0).$$

令 $R\to+\infty,\ \rho\to 0$ 得

$$(1-e^{2\pi pi})\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}\,\mathrm{d}\,x=2\pi i\,\mathrm{Res}(F,-1)$$

$$=2\pi i\frac{-e^{\pi pi}}{(m-1)!}(1-p)(2-p)\cdots(m-1-p),\ (m\geq 2)$$

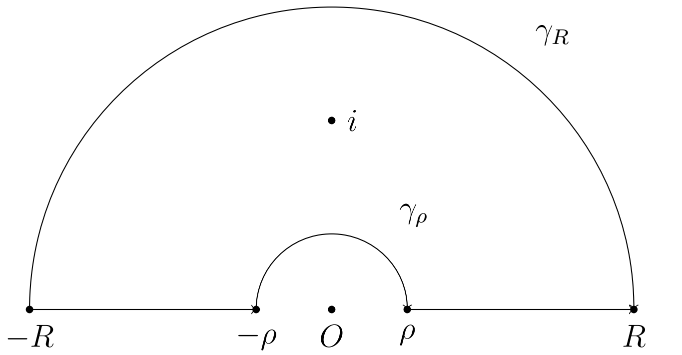
$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{\sin(p\pi)},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}\frac{1}{(m-1)!}(1-p)(2-p)\cdots(m-1-p),\ (m\geq 2).$$

□

例 10.7. $I=\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x$。

解. 令 $F(z)=\frac{\log z}{(1+z^2)^2}$，如图选取围道：



$$\int_{-R}^{-\rho}\frac{\log|x|+i\pi}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\gamma_\rho}F(z)\,\mathrm{d}\,z+\int_\rho^R\frac{\log x\,\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)^2}+\int_{\gamma_R}F(z)\,\mathrm{d}\,z=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(F,i)$$

$$=2\pi i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{i}{4}\right)$$

$$\left|\int_{\gamma_R}F(z)\,\mathrm{d}\,z\right|\leq\int_0^\pi\frac{|\log R+i\theta|}{(R^2-1)^2}R\,\mathrm{d}\,\theta\leq\int_0^\pi\frac{\log R+\pi}{(R^2-1)^2}R\,\mathrm{d}\,\theta\to 0,\ (R\to+\infty)$$

$$\left|\int_{\gamma_\rho}F(z)\,\mathrm{d}\,z\right|\leq\int_0^\pi\frac{|\log\rho+i\theta|}{(1-\rho^2)^2}\rho\,\mathrm{d}\,\theta\to 0,\ (\rho\to 0)$$

$$\Rightarrow 2\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x+i\pi\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)^2}=2\pi i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{i}{4}\right).$$

两边取实部，$I=-\frac{\pi}{4}$。 □

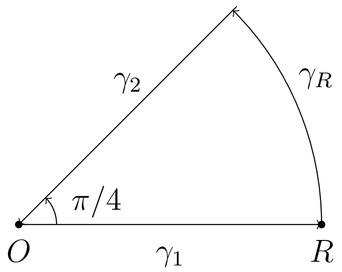
对于 $\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)$ 型积分。

令 $z=e^{i\theta},\ \sin\theta=\frac{1}{2i}(z-z^{-1}),\ \cos\theta=\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\ \mathrm{d}\theta=\frac{1}{iz}\mathrm{d}z$，则积分化为

$$\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta=\int_{|z|=1}R(\frac{z-z^{-1}}{2i},\frac{z+z^{-1}}{z})\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}\,z.$$

对于 Fresnel 积分 $I_1=\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x,\ I_2=\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x$。

令 $f(x)=e^{iz^2}$，如图选取围道：



$$\int_0^R e^{ix^2}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}\,z+\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z=0,$$

$$\left|\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\,\mathrm{d}\,z\right|\leq\int_{\gamma_R}\left|e^{iR^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2}\right||\,\mathrm{d}\,z|=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\theta}R\,\mathrm{d}\,\theta\leq\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cdot\frac{4\theta}{\pi}}R\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$=\frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2})\to 0,\ (R\to+\infty).$$

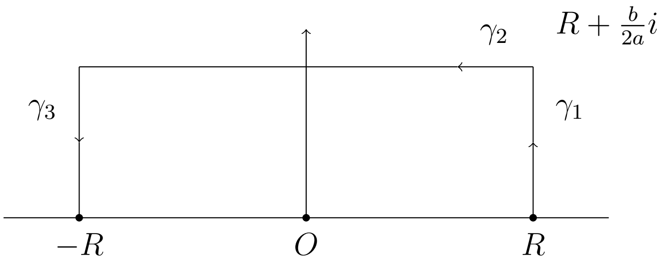
当 $z\in\gamma_2$ 时，$z=re^{i\frac{\pi}{4}}$ $(0\leq r\leq R)$，于是

$$\int_{\gamma_2} e^{iz^2}\,\mathrm{d}\,z=\int_R^0 e^{ir^2i}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{d}\,r\to -e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,\mathrm{d}\,r=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

两边取实部、虚部得 $I_1=I_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$。

对于 Poisson 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}\,x,\ (a>0)$。

令 $f(z)=e^{-az^2}$，如图选取围道：



$$\int_{-R}^R e^{-ax^2}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}\,z=0.$$

可证 $\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z\to 0,\ \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}\,z\to 0,\ (R\to+\infty)$，而

$$\int_{\gamma_2} e^{-az^2}\,\mathrm{d}\,z=\int_R^{-R} e^{-a(x+\frac{b}{2a}i)^2}\,\mathrm{d}\,x=-e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-R}^R e^{-ax^2}e^{-bix}\,\mathrm{d}\,x=-e^{\frac{b^2}{4a}}\int_{-R}^R e^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}\,x$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

11　亚纯函数的极点，整函数的零点

- 多项式是由零点“唯一”确定的 (相差一个常数)。
- 零点无穷多个怎么办？

定理 11.1. *Mittag-Leffler* 定理：设 $z_n \in \mathbb{C}\,(n=1,2,\cdots)$ 满足 $|z_1|<|z_2|\le\cdots$ 且 $\lim|z_n|=+\infty$，设 $\psi_n(z)=\sum\limits_{j=1}^{k_n}\frac{c_{n,j}}{(z-z_n)^j}\,(n=1,2,\cdots)$，则存在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 f，恰以 $\{z_n\}$ 为极点，且在 z_n 处的 *Laurent* 展开式的主要部分为 $\psi_n(z)$。

证明. 不妨设 $z_n\neq 0$，对 $\forall\, n>0,\ \psi_n(z)$ 在 $\overline{B(0,\frac{|z_n|}{2})}$ 中全纯，其 Taylor 级数在 $\overline{B(0,\frac{|z_n|}{2})}$ 中一致收敛于 $\psi_n(z)$，故存在多项式 $O_n(z)$ s.t. $|\psi_n(z)-O_n(z)|<\frac{1}{2^n},\ \forall\,|z|\le\frac{|z_n|}{2}$。

令 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\psi_n(z)-O_n(z)),\ \forall\, z\in\mathbb{C}$，任取 $R>0$，取 N 充分大 s.t. $|z_N|>2R$，当 $n\ge N$ 时 $|z_n|>2R$，从而

$$
\begin{aligned}
&|\psi_n(z)-O_n(z)|<\frac{1}{2^n},\ \forall\, z\in\overline{B(0,R)}\\
\Rightarrow &f(z)=\sum_{n=1}^{N-1}(\psi_n(z)-O_n(z))+\sum_{n=N}^{+\infty}(\psi_n(z)-O_n(z)).
\end{aligned}
$$

由 W-判别法知 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}(\psi_n(z)-O_n(z))$ 在 $\overline{B(0,R)}$ 中一致收敛。

由于 $n\ge N$ 时 $|z_n|>2R$，$\psi_n(z)-O_n(z)$ 在 $B(0,R)$ 中全纯，故 $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}(\psi_n(z)-O_n(z))$ 在 $\overline{B(0,R)}$ 中全纯。

由于 R 是任意的，故 f 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数且满足定理的要求。 □

设 $a_n\in\mathbb{C}$，称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)$ 存在且不为 0。那么

(1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛 $\Rightarrow \lim a_n=0$；

(2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛。

这是因为

$$
\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)<+\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+|a_n|)<+\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty.
$$