# Lec23 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 5 月 23 日

我们回忆，留数定理告诉我们：

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}(f, z_i).$$

留数部分的计算，当 $z_i$ 为极点时，利用定理 9.2 的公式；当 $z_i$ 为本性奇点，考虑 Laurent 展开 $-1$ 项。

**例 9.1.** 1.

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}\,z}{1+z^2} = 2\pi i(\operatorname{Res}(f,i)+\operatorname{Res}(f,-i)) = 0,$$

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}.$$

2.

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{\sin z}\,\mathrm{d}\,z = 2\pi i\cdot\lim_{z\to 0} z\frac{e^z}{\sin z} = 2\pi i.$$

3.

$$\int_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}\,z = 2\pi i\operatorname{Res}(f,0),$$

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z\cdot e^{\frac{1}{z}} = (1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots),$$

$$\frac{1}{z}\text{的系数} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!n!} = \operatorname{Res}(f,0).$$

4.

$$\int_{|z|=1}\frac{z^2\sin^2 z}{(1-e^z)^5}\,\mathrm{d}\,z = 2\pi i\cdot\operatorname{Res}(f,0),$$

$$\frac{z^2(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots)^2}{(-z-\frac{z^2}{2!}-\cdots)^5} = \frac{z^4(1=\frac{z^2}{3!})^2}{z^5(1+\frac{z}{2!}+\cdots)^5} \Rightarrow \operatorname{Res}(f,0) = -1.$$

## 10 计算定积分

**引理 10.1.** *若 $f(z)$ 在 $D\colon 0<|z-a|\le r,\ \theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$ 中连续，且 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = A$，则*

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}\,z = Ai(\theta_2-\theta_1),\ \gamma_\rho\colon z = a+\rho e^{i\theta}\ (\theta_1\le\theta\le\theta_2).$$

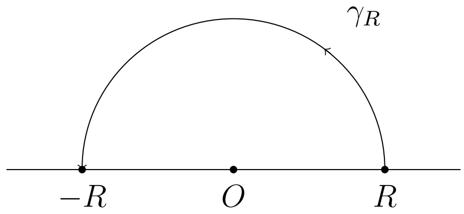
**证明.**

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}\,z &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(a+\rho e^{i\theta})\rho e^{i\theta} i\,\mathrm{d}\,\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(z)(z-a)i\,\mathrm{d}\,\theta \to A\int_{\theta_1}^{\theta_2} i\,\mathrm{d}\,\theta = Ai(\theta_2-\theta_1).\end{aligned}$$

□

**引理 10.2.** *Jordan*：若 $f(z)$ 在 $R_0 \le |z| < +\infty$, $\mathrm{Im} z > 0$ 连续，且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$，设 $\alpha > 0$，则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0.$$




**证明.** 设 $M(R) = \max\limits_{|z|=R}\{|f(z)|\}$，则

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| &\le M(R)\cdot\int_0^\pi \left|e^{i\alpha(R\cos\theta+iR\sin\theta)}\right| R\,\mathrm{d}\,\theta \\ &= M(R)\cdot R\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = 2M(R)R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\theta}\,\mathrm{d}\,\theta \\ &< 2M(R)R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\frac{2}{\pi}\theta}\,\mathrm{d}\,\theta = \frac{\pi}{\alpha}M(R)(1-e^{-\alpha R}) \to 0\ (R\to+\infty).\end{aligned}$$

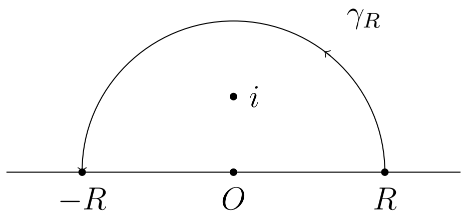
□

特别地对 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 型的积分，有相应的策略，概括来讲是下面三步：

1. 复化；
2. 取合适的积分路径；
3. 留数定理。

**例 10.1.** $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)^{n+1}}\ (n \ge 0)$。

**解.** 复化取 $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$，如图选取积分路径。



则

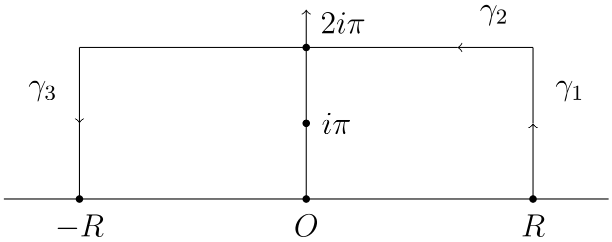
$$\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)^{n+1}}+\int_{\gamma_R}f(z)\,\mathrm{d}\,z=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,i),\ \int_{\gamma_R}f(z)\,\mathrm{d}\,z\to 0,$$

$$\mathrm{Res}(f,i)=\frac{1}{n!}\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,z^n}\left(\frac{1}{(n+i)^{n+1}}\right)=\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n!}\frac{1}{(2i)^{n+1}}.$$

令 $R\to+\infty$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}$。 □

**例 10.2.** 证明：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{\sin(\pi a)}\ (0<a<1)$。

**证明.** $1+e^z=0\Rightarrow z=i\pi+2k\pi i\ (k\in\mathbb{Z})$，令 $f(z)=\frac{e^{az}}{1+e^z}$，如图选取矩形围道。




$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3}f(z)\,\mathrm{d}\,z=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,i\pi),$$

$$\mathrm{Res}(f,i\pi)=\lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)\frac{e^{az}}{1+e^z}=\lim_{z\to i\pi}\frac{e^{az}}{\frac{e^z-e^{i\pi}}{z-i\pi}}=\frac{e^{a\pi i}}{(a^z)'|_{z=i\pi}}=-e^{a\pi i},$$

$$\left|\int_{\gamma_1}\frac{e^{az}}{1+e^z}\,\mathrm{d}\,z\right|\le\int_0^{2\pi}\frac{|e^{a(R+iy)}|}{|1+e^{R+iy}|}|i|\,\mathrm{d}\,y\le\int_0^{2\pi}\frac{e^{aR}}{e^R-1}\,\mathrm{d}\,y\le\int_0^{2\pi}\frac{e^{aR}}{\frac{1}{2}e^R}\,\mathrm{d}\,y$$

$$=e^{(a-1)R}4\pi\to 0,\ (R\to+\infty)$$

$$\left|\int_{\gamma_3}\frac{e^{az}}{1+e^z}\,\mathrm{d}\,z\right|\le\int_0^{2\pi}\frac{|e^{a(-R+iy)}|}{|1+e^{-R+iy}|}\,\mathrm{d}\,y\le\int_0^{2\pi}\frac{e^{-aR}}{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,y\to 0,\ (R\to+\infty)$$

$$\int_{\gamma_2}\frac{e^{az}}{1+e^z}\,\mathrm{d}\,z=\int_R^{-R}\frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\,\mathrm{d}\,x=-e^{2\pi ai}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,\mathrm{d}\,x$$

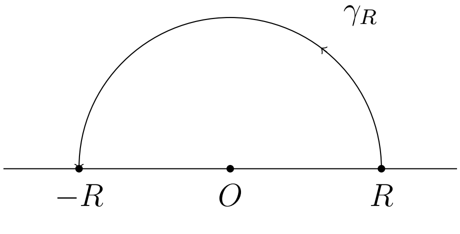
$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{-2\pi i\cdot e^{a\pi i}}{1-e^{2\pi ai}}=\frac{-2\pi i}{e^{-a\pi i}-e^{a\pi i}}=\frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

□

**例 10.3.** $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos ax\,\mathrm{d}\,x,\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin ax\,\mathrm{d}\,x\ (a>0)$，令 $F(z)=f(z)e^{iaz}$，当 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$，可以用 Jordan 引理。

**例 10.4.** Laplace 积分：$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x\ (a>0)$.

**解.** 取 $F(z)=\frac{e^{iaz}}{1+z^2}$，考虑如图的围道：

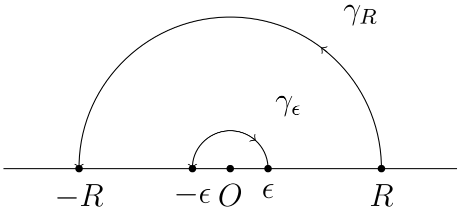


$$\int_{-R}^{R} F(x)\,\mathrm{d}\,x+\int_{\gamma_R} F(z)\,\mathrm{d}\,z=2\pi i\cdot \mathrm{Res}(F,i)=\pi\cdot e^{-a}.$$

令 $R\to+\infty$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax+i\sin ax}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x=\pi e^{-a}$，取实部 $I=\frac{\pi}{2}e^{-a}$。 □

**例 10.5.** Dirichlet 积分：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{2}$。

**证明.** 令 $F(z)=\frac{e^{iz}}{z}$，如图取围道。




$$\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}\,z+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}\,z=0.$$

而第一项 $=\int_R^{\varepsilon}\frac{e^{-ix}}{-x}(-\,\mathrm{d}\,x)=-\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{-ix}}{x}\,\mathrm{d}\,x$，第二项由引理 10.1 计算得 $-\pi i$，第四项由 Jordan 引理为零，故 $\int_{\varepsilon}^{R}\frac{2i\cdot\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x\to\pi i$，即 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\pi}{2}$。 □