Lec22 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 5 月 18 日

8 亚纯函数

设 f 为整函数，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\ z\in\mathbb{C}$ 也可以看成 f 在 ∞ 附近的 Laurent 展开式。

定理 8.1. 设 f 为整函数，

(1) 若 ∞ 为 f 的可去奇点，则 f 为常数。

(2) 若 ∞ 为 f 的极点，则 f 为多项式。

评论. 若 ∞ 为整函数 f 的本性奇点，则称 f 为超越整函数。例如 $e^z,\ \sin z$。

定义 8.1. 若 f 在 $\mathbb{C}$ 上只有孤立奇点且均为极点，则称 f 为亚纯函数。

评论. (1) 亚纯函数可能有无穷多个极点，但是这些极点在 $\mathbb{C}$ 中没有聚点 (趋于 ∞)，例如 $f(z)=\frac{1}{\sin z}$。

(2) 整函数和有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 都是亚纯函数。

设 $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0\ (a_n\neq 0),\ Q(z)=b_mz^m+\cdots+b_1z+b_0\ (b_m\neq 0)$，则

$$\lim_{z\to\infty}\frac{P(z)}{Q(z)}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_n}, & n=m,\\ \infty, & n>m,\\ 0, & n<m\end{cases}.$$

可见 ∞ 为有理函数的可去奇点或极点。

定理 8.2. 若 ∞ 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 f 的可去奇点或极点，则 f 为有理函数。

证明. ∞ 为孤立奇点 $\Rightarrow\ \exists\, R>0,\ |z|>R$ 中 $f(z)$ 全纯。

f 亚纯 $\Rightarrow f$ 在 $|z|\leq R$ 中只有有限多个极点，记为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，阶数记为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，记 $f(z)$ 在 z_j 处 Laurent 展开式的主要部分为

$$h_j(z)=\frac{C_{n_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{m_j}}+\cdots+\frac{C_1^{(j)}}{z-z_j},\ (j=1,2,\cdots,n).$$

令 $F(z)=f(z)-\sum\limits_{j=1}^{n}h_j(z)$，易见 $F(z)$ 为整函数，且 ∞ 为 $F(z)$ 的可去奇点或极点 $\Rightarrow F(z)$ 为常数或多项式 $\Rightarrow f(z)$ 为有理函数。 $\square$

定理 8.3.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{f(z) = az + b \mid a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0\}.$$

证明. 设 $f(z) = az + b,\ a \neq 0$，则显然 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$。

设 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$，则 f 为整函数。

(i) 若 ∞ 为 f 的可去奇点，则 f 为常数，矛盾。

(ii) 若 ∞ 为 f 的极点，则 f 为多项式，由于 f 为单射，故 f 为一次函数。

(iii) 若 ∞ 为本性奇点，由 W-定理，任取 $A \in \mathbb{C}$，存在 $z_n \to \infty$ 且 $f(z_n) \to A$。由于 f^{-1} 全纯，故 $z_n = f^{-1}(f(z_n)) \to f^{-1}(A)$，故 $f^{-1}(A) = \infty$，与 $f^{-1}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 全纯矛盾。

□

那么 $f\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ 全纯该如何定义？

我们分类讨论：

1. 若 $f(z_0) = \infty,\ z_0 \in \mathbb{C}$，那么 f 在 z_0 处全纯 $:\Leftrightarrow \frac{1}{f(z)}$ 在 z_0 全纯。
2. 若 $f(\infty) = \alpha \in \mathbb{C}$，则 f 在 ∞ 处全纯 $\Leftrightarrow f(\frac{1}{z})$ 在 0 处全纯。
3. 若 $f(\infty) = \infty$，则 f 在 ∞ 处全纯 $\Leftrightarrow \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ 在 0 处全纯。

定理 8.4.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty) = \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ 且} ad - bc \neq 0 \right\}.$$

证明. 可以验证 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$。

反过来，设 $f \in \mathbb{C}_\infty$。

(i) 若 $\exists\, z_0 \in \mathbb{C},\ f(z_0) = \infty$，由于 f 为单射，z_0 为 $f|_{\mathbb{C}}$ 上的唯一的奇点且为极点 $\Rightarrow f$ 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数。由于 $f(\infty) = \alpha \in \mathbb{C}$，$\infty$ 为 f 的可去奇点。

由定理 8.2，f 为有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$，由于 f 为单射，$P(z), Q(z)$ 为一次函数。

(ii) 若 $f(\infty) = \infty$，则 $f|_{\mathbb{C}}$ 为整函数。由定理 8.1，$f(z)$ 为多项式，由单射性知 f 为一次函数。

□

定理 8.5.

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc > 0 \right\},\ \mathbb{H} = \{z \mid \mathrm{Im} z > 0\}.$$

证明. $\supset$：已证。

$\subset$：见 Stein。 □

9 留数定理

定义 9.1. 设 a 是 f 的孤立奇点，$r>0$，f 在 $B(a,r)\setminus\{a\}$ 中全纯，设其 Laurent 展开式为 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$，称 c_{-1} 为 f 在 a 点的**留数**，记为 $\mathrm{Res}(f,a)$ 或 $\mathrm{Res}_{z=a}f$。

设 γ: $|z-a|=\rho\ (0<\rho<r)$，已知 (由定理)：$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta$，特别地 $c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta$，或者

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=\int_\gamma\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n\,\mathrm{d}\,z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_\gamma c_n(z-a)^n\,\mathrm{d}\,z=2\pi i\cdot c_{-1}.$$

定理 9.1. *留数定理：设 $D=\mathrm{int}(\gamma)$，f 在 D 中除去 $z_1,\cdots,z_n$ 外全纯且连续到边界，则*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=2\pi i\sum_{j=1}^n\mathrm{Res}(f,z_j).$$

证明. 与 Cauchy 积分定理一回事。 □

定理 9.2. *若 a 是 f 的 m 阶极点，则*

$$\mathrm{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}((z-a)^mf(z)).$$

证明. 设 $f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+g(z)$，$g(z)$ 全纯，在 a 附近。那么

$$\begin{aligned}&(z-a)^mf(z)=c_{-m}+\cdots+c_{-1}(z-a)^{m-1}+g(z)\cdot(z-a)^m\\ \Rightarrow&c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}((z-a)^mf(z)).\end{aligned}$$

特别地，当 $m=1$ 时，$\mathrm{Res}(f,a)=\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$。 □

定理 9.3. *设 $f=\frac{g}{h}$, g,h 在 a 处全纯，$g(a)\neq0$, $h(a)=0$，且 $h'(a)\neq0$，则 $\mathrm{Res}(f,a)=\frac{g(a)}{h'(a)}$。*

证明. 由条件知 a 为 f 的 1 阶极点。故

$$\mathrm{Res}(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{g(z)}{h(z)}=\lim_{z\to a}\frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}}=\frac{g(a)}{h'(a)}.$$

□