Lec21 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 5 月 16 日

7 孤立奇点

定义 7.1. 若 f 在 $0<|z-z_0|<R$ 中全纯，在 z_0 处无定义，则称 z_0 为 f 的**孤立奇点**。

(i) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在，则称 z_0 为**可去奇点**。

(ii) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$，则称 z_0 为 f 的**极点**。

(iii) 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在，则 z_0 称为 f 的**本性奇点**。

定理 7.1. *Riemann*：z_0 为 f 的可去奇点 $\Leftrightarrow$ f 在 z_0 附近有界。

证明. $\Rightarrow$：显然。

$\Leftarrow$：设 $0<\varepsilon<R$ s.t. 当 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 时 $\exists\, M$, $|f(z)|\le M$，设 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$，其中 $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ $(0<\rho<\varepsilon)$，当 $n\ge 1$ 时，

$$|a_{-n}|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta\right|\le\frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{-n+1}}2\pi\rho=M\rho^n\to 0,\ \rho\to 0$$

$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ $(0<|z-z_0|<R)\Rightarrow \lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a_0\in\mathbb{C}\Rightarrow z_0$ 为 f 的可去奇点。 □

评论. 若 z_0 为 f 的可去奇点，补充定义 $f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$，则 f 在 $|z-z_0|<R$ 中全纯。

定理 7.2. z_0 为 f 的极点 $\Leftrightarrow$ z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的零点。

证明. z_0 为 f 的极点 $\Rightarrow \lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty\Rightarrow\exists\,\varepsilon>0$，当 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 时 $|f(z)|\ne 0\Rightarrow\varphi(z):=\frac{1}{f(z)}$ 在 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 中全纯，且 $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=0\Rightarrow z_0$ 为 φ 的可去奇点且 $\varphi(z_0)=0$。

反过来，设 $\varphi(z_0)=0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{\varphi(z)}=\infty$。 □

定义 7.2. z_0 称为 f 的 m **阶极点**，如果 z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点。

定理 7.3. z_0 为 f 的 m 阶极点 $\Leftrightarrow a_{-m}\ne 0$ 且当 $n\ge m$ 时 $a_{-n}=0$。

证明. $\Rightarrow$：设 z_0 为 f 的 m 阶极点，则 z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点。故在 z_0 附近 $\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m g(z)$，$g(z)$ 在 z_0 处全纯且 $g(z_0)\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{g(z)}$ 在 z_0 处全纯，设 $\frac{1}{g(z)}=c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$ $(c_0\neq 0)\Rightarrow f(z)=(z-z_0)^{-m}\frac{1}{g(z)}=\frac{c_0}{(z-z_0)^m}+\frac{c_1}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots$。

$\Leftarrow$：由条件知 $(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-(m-1)}(z-z_0)+\cdots=:\varphi(z)$，则 $\varphi(z)$ 在 z_0 处全纯且 $\varphi(z_0)=a_{-m}\neq 0$，故 $\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\frac{1}{\varphi(z)}\Rightarrow z_0$ 为 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点。 □

综上，设 f 在 $0<|z-z_0|<R$ 中的 Laurent 展开式为 $f(z)=\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}a_m(z-z_0)^m$，则

(1) z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点 $\Leftrightarrow a_{-n}=0,\ n\geq 1$ 时。

(2) z_0 为 f 的 m 阶极点 $\Leftrightarrow a_{-m}\neq 0$ 且 $n>m$ 时 $a_{-n}=0$。

(3) z_0 为 f 的本性奇点 $\Leftrightarrow$ 有无穷多个 $n\geq 1$ 使得 $a_{-n}\neq 0$。

定理 7.4. *Weierstrass*：设 z_0 为 f 的本性奇点，则对任意 $A\in\mathbb{C}_\infty$，存在 $z_n\to z_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=A$。

证明. (1) 设 $A=\infty$，由定理 7.1，f 在 z_0 附近无界 $\Rightarrow \forall\, n>0,\ \exists\,|z_n-z_0|<\frac{1}{n}$，且 $|f(z)|>n$，故 $\lim z_n=z_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=\infty$。

(2) 设 $A\in\mathbb{C}$，设 $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-A}$，若 $\varphi(z)$ 在 z_0 附近有界 $\Rightarrow z_0$ 为 $\varphi(z)$ 的可去奇点 $\Rightarrow \varphi(z)$ 在 z_0 处全纯。

(i) 若 $\varphi(z_0)\neq 0$，则 $f(z)=A+\frac{1}{\varphi(z)}$ 在 z_0 处全纯，矛盾。

(ii) 若 $\varphi(z_0)=0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$，与 z_0 为本性奇点矛盾。

同理 $\varphi(z)$ 在 z_0 附近无界 $\Rightarrow \exists\, z_n\to z_0,\ f(z_n)\to A$。

□

对于 ∞ 为孤立奇点的情形：

定义 7.3. 若 f 在 $R<|z|<+\infty$ 中全纯，则称 ∞ 为 f 的孤立奇点。

令 $g(z)=f(\frac{1}{z})$，则 $g(z)$ 在 $0<|z|<\frac{1}{R}$ 中全纯。若 $z=0$ 为 g 的可去奇点 (m 阶极点，本性奇点)，则称 ∞ 为 f 的可去奇点 (m 阶极点，本性奇点)。

设 f 在 $|z|>R$ 中的 Laurent 级数为 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n$，则 $g(z)=f(\frac{1}{z})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^{-n}$。故

(1) ∞ 为 f 的可去奇点 $\Leftrightarrow n\geq 1$ 时 $a_n=0\Leftrightarrow f(z)=a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\cdots$。

(2) ∞ 为 f 的 m 阶极点 $\Leftrightarrow \exists\, m\geq 1,\ a_m\neq 0$ 且当 $n>m$ 时 $a_n=0\Leftrightarrow f(z)=a_mz^m+\cdots+a_1z+a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\cdots$。

(3) ∞ 为 f 的本性奇点 $\Leftrightarrow$ 存在无穷多个 $n\geq 1$ s.t. $a_n\neq 0$。

例 7.1. (1) 0 为 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点。

(2) ∞ 为 e^z 的本性奇点。

例 7.2. 非孤立奇点的例子：$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, $z_n=\frac{1}{n\pi}$ 为 f 的奇点，$z=0$ 为 f 的非孤立奇点。

例 7.3. (1) $\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{e^z-1}$；

(2) $e^{\cot\frac{1}{z}}$。

解. (1) (a) $\lim\limits_{z\to 1}\frac{1}{1-z}=\infty$ 而 $\lim\limits_{z\to\infty}e^z$ 不存在 $\Rightarrow z=1$ 为 f 的本性奇点。

(b) $e^{2k\pi i}-1=0$, $(e^z-1)'|_{z=2k\pi i}=e^{2k\pi i}\neq 0\Rightarrow 2k\pi i$ 为 e^z-1 的 1 阶零点 $\Rightarrow 2k\pi i$ 为 f 的 1 阶极点。

(c) ∞ 为非孤立的奇点。

(2) 0 是非孤立奇点，$\infty, \frac{1}{k\pi}$ 为本性奇点。

□