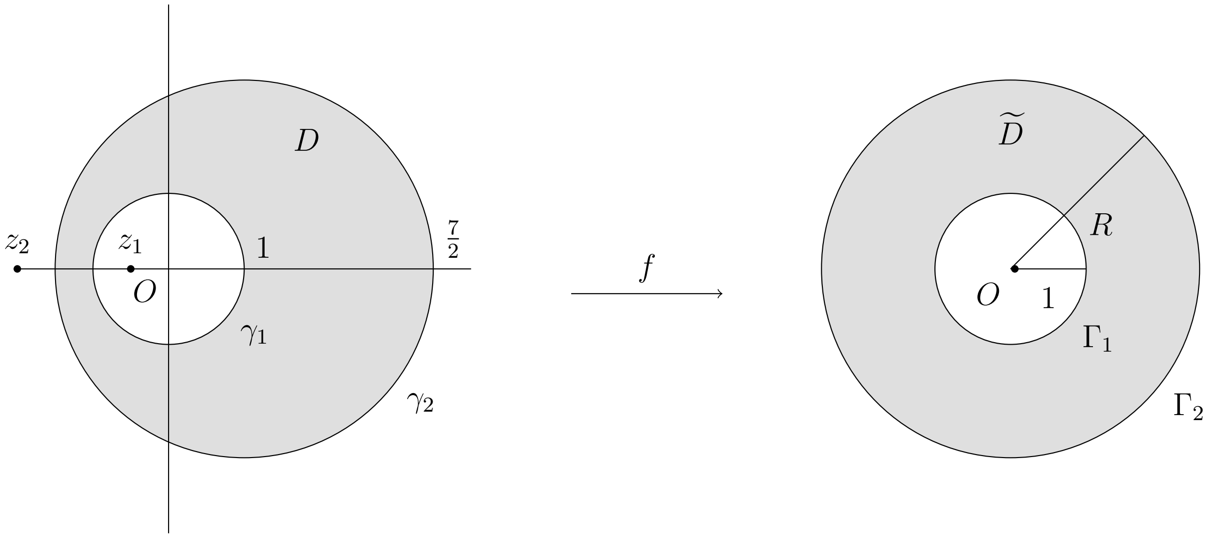
Lec20 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 5 月 11 日

例 5.8. 将 $\gamma_1 : |z| = 1$ 和 $\gamma_2 : |z-1| = \frac{5}{2}$ 围成的区域共形地映为 $1 < |w| < R$，并求 R。



解. 假设分式线性变换 $f\colon D \to \widetilde{D}$，0 和 ∞ 为 Γ_1, Γ_2 的对称点，记 $z_1 = f^{-1}(0)$, $z_2 = f^{-1}(\infty)$，则 z_1, z_2 为 γ_1, γ_2 的对称点。

故 $z_1, z_2, 0, 1$ 四点共线 $\Rightarrow z_1, z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} z_1 \cdot z_2 = 1 \\ (z_1 - 1)(z_2 - 1) = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{4} \\ z_2 = -4 \end{cases}$ (或反过来)。

令 $f(z) = \lambda \frac{z+\frac{1}{4}}{z+4}$，此时 $f(\gamma_1) = \Gamma_1$，

$$1 = |f(1)| = \left|\lambda \frac{1+\frac{1}{4}}{1+4}\right| = \left|\frac{\lambda}{4}\right| \Rightarrow \lambda = 4e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow f(z) = e^{i\theta}\frac{4z+1}{z+4} \Rightarrow R = \left|f\left(\frac{7}{2}\right)\right| = 2.$$

□

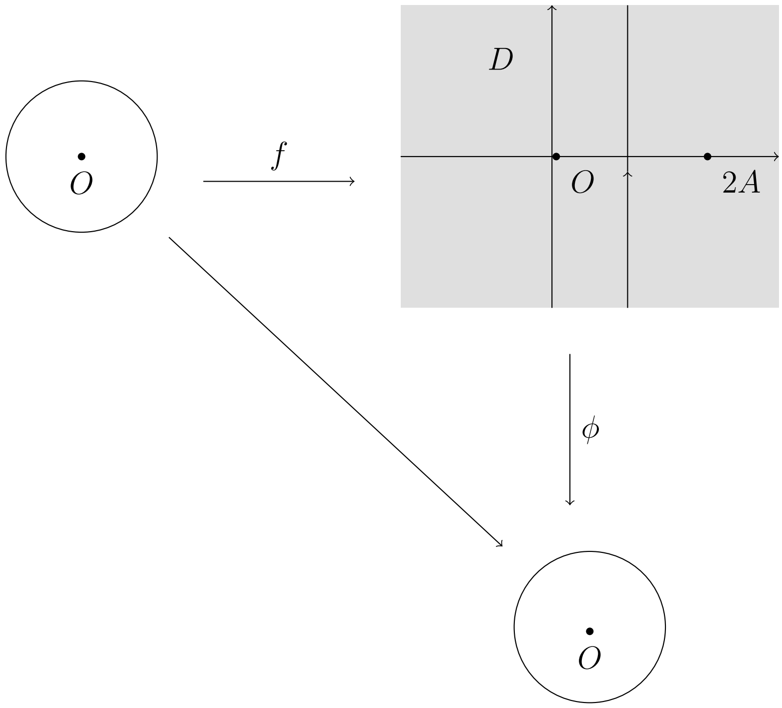
评论. $1 < |z| < R$ 和 $1 < |z| < R'$ 共形等价 $\Leftrightarrow R = R'$(待证明)。

S-引理的习题

例 5.9. $f \in H(B(0,1))$, $f(0) = 0$，并且存在 $A > 0$ 使得 $\mathrm{Re} f \leq A$，证明

$$|f(z)| \leq \frac{2A|z|}{1-|z|}, \forall\, z \in B(0,1).$$

证明. 构造分式线性变换 $\varphi\colon D \to B(0,1)$ $(0 \to 0,\ 2A \to \infty)$，取 $\varphi(z) = \frac{z-0}{z-2A}$。



令 $g = \varphi \circ f\colon B(0,1) \circlearrowleft$, $g(0) = 0$，由 S-引理，$|g(z)| \le |z|$，故

$$g(z) = \frac{f(z)}{f(z) - 2A} \Rightarrow f(z) = \frac{2Ag(z)}{1 - g(z)}$$

$$\Rightarrow |f(z)| \le \frac{2A|g(z)|}{1 - |g(z)|} \le \frac{2A|z|}{1 - |z|}.$$

□

例 5.10. P177.26：$f\colon B(0,1) \to B(0,1)$ 全纯，证明：

$$|f(z) - f(0)| \le |z| \cdot \frac{1 - |f(0)|^2}{1 - |f(0)||z|}.$$

证明. 由 S-P 定理，$|\varphi_{f(0)} \circ f(z)| \le |\varphi_0(z)| = |z|$ $(\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z})$。

令 $g(z) = \varphi_{f(0)}(z) \circ f(z) = \frac{f(0)-f(z)}{1-\overline{f(0)}z} \Rightarrow f(z) = \frac{f(0)-g(z)}{1-\overline{f(0)}g(z)}$

$$\Rightarrow f(z) - f(0) = \frac{g(z)(|f(0)|^2 - 1)}{1 - \overline{f(0)}g(z)}$$

$$\Rightarrow |f(z) - f(0)| \le |z| \frac{1 - |f(0)|^2}{1 - |f(0)||z|}.$$

□

例 5.11. 设 $f\colon B(0,1) \to B(0,1)$ 全纯且 $\exists\, a \ne b \in B(0,1)$, $f(a) = f(b) = 0$，证明：

$$|f(z)| \le \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \cdot \left|\frac{z-b}{1-\overline{b}z}\right|.$$

证明. $f \circ \varphi_a(0) = 0$，由 S-引理，$|f \circ \varphi_a(z)| \le |z|$，将 z 替换成 $\varphi_a(z)$，$|f(z)| \le |\varphi_a(z)|$。

由于 $f \circ \varphi_a(0) = 0$, $f \circ \varphi_a(z) = zg(z)$，则 $g(z)$ 全纯且 $|g(z)| \le 1$。

若 $\exists\, z_0$ s.t. $|g(z_0)|=1 \Rightarrow f\circ\varphi_a$ 为旋转 $\Rightarrow f$ 为单射，矛盾。故 $|g(z)|<1, \forall\, z\in B(0,1)$，于是 $f\circ\varphi_a(z)=zg(z) \Rightarrow f(z)=\varphi_a(z)\cdot g\circ\varphi_a(z)$，因为 $f(b)=0$，故 $g\circ\varphi_a(b)=0$，由前面证明，$|g\circ\varphi_a(z)|\le|\varphi_b(z)|$。故 $|f(z)|\le|\varphi_a(z)||\varphi_b(z)|$。 □

Part V

全纯函数的 Laurent 展开及应用

6 Laurent 展开

我们熟知

- $f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$，多项式，在 $\mathbb{C}$ 中全纯。
- $\tilde f(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$, $\exists\, R\ge 0$ s.t. $\tilde f(z)$ 在 $|z|<R$ 中全纯。
- $g(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{z^k}$ 在 $|z|>0$ 中全纯。
- $\tilde g(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{z^k}$, $\exists\, R'$，当 $|\frac{1}{z}|<R'$，即 $|z|>\frac{1}{R'}$ 时全纯。

定义 6.1. 称级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

为 **Laurent** 级数。

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R，$\sum_{n=0}^{\infty}a_{-n}\zeta^n$ 的收敛半径为 ρ，则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z|>r:=\frac{1}{\rho}$ 中收敛。

当 $r<|z-z_0|<R$ 时，Laurent 级数在 $r<|z-z_0|<R$ 中内闭一致收敛 $\Rightarrow$ 和函数在环中全纯。

定理 6.1. 设 $D=\{z\mid r<|z-z_0|<R\}$。如果 $f\in H(D)$，则 f 可以在 D 中展开为 *Laurent* 级数 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$，且

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta\ (r<\rho<R)$$

并且展开式是唯一的。

证明. 任意固定 $z\in D$，取 r_1,r_2, $r<r_1<|z-z_0|<r_2<R$，记 $\gamma_j=\{z\mid |z-z_0|=$

$r_j\}$ $(j=1,2)$，由 Cauchy 积分公式，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\,\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\,\zeta.$$

记 $M_j=\max\limits_{\zeta\in\gamma_j}|f(\zeta)|$ $(j=1,2)$，当 $\zeta\in\gamma_1$ 时，$|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}|<1$，

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=-\frac{f(\zeta)}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=-f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}},$$

$$\left|\frac{f(\zeta)(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\right|\le M_1\frac{1}{|z-z_0|}\left(\frac{r}{|z-z_0|}\right)^n.$$

由 W-判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$ 关于 $\zeta\in\gamma_1$ 一致收敛

$$\begin{aligned}\Rightarrow -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\,\zeta&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta\cdot(z-z_0)^{-n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}.\end{aligned}$$

类似地 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\,\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$。

唯一性：若 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a'_n(z-z_0)^n$，设 $r<\rho<R$，则该级数在 $|z|=\rho$ 上一致收敛。

逐项积分得

$$a_m=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a'_n\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{m+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta=a'_m.$$

□

例 6.1. 设 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$，求它的 $1<|z|<2$ 和 $2<|z|<+\infty$ 中的 Laurent 展开式。

解. (1) 当 $1<|z|<2$ 时，$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n=\cdots$。

(2) 当 $|z|>2$，$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$。

□