Lec2 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 9 日

定义 0.1. $E \subset \mathbb{C}$ 称为**连通的**，如果 E 可以表示为两个非空不相交集合 E_1, E_2 的并，则 $\overline{E_1} \cap E_2 \neq \varnothing$ 或 $E_1 \cap \overline{E_2} \neq \varnothing$。

定理 0.1. 开集 E 连通 $\Leftrightarrow$ E 不能表示为两个非空不相交开集的并。

证明. "$\Rightarrow$"：若存在非空不相交开集 E_1, E_2 使得 $E = E_1 \cup E_2 \Rightarrow E_1 \subset E_2^C$（闭集）$\Rightarrow \overline{E_1} \subset E_2^C \Rightarrow \overline{E_1} \cap E_2 = \varnothing$，同理 $E_1 \cap \overline{E_2} = \varnothing$，矛盾。

"$\Leftarrow$"：假设 E 不连通，则存在非空不交集合 E_1, E_2 使得 $E = E_1 \cup E_2$ 且 $\overline{E_1} \cap E_2 = \varnothing$，$E_1 \cap \overline{E_2} = \varnothing$。$\forall\, z \in E_1 \subset E \Rightarrow \exists\, \varepsilon_1 > 0\ s.t.\ B(z, \varepsilon_1) \subset E$。因为 z 不是 E_2 的聚点，$\exists\, \varepsilon_2 > 0\ s.t.\ B(z, \varepsilon_2) \cap E_2 = \varnothing$。取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$，$B(z, \varepsilon) \subset E_1 \Rightarrow E_1$ 开集，同理 E_2 为开集。矛盾。 $\square$

定义 0.2. 设 $E \subset \mathbb{C}$，如果对 $\forall\, z_1, z_2 \in E$，存在连续映射 $\gamma\colon [0,1] \to E\ s.t.\ \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2$，则称 E 为**道路连通的**。

定理 0.2. 设 $E \subset \mathbb{C}$ 为开集，则 E 道路连通 $\Leftrightarrow$ E 连通。

证明. "$\Leftarrow$"：设 E 连通，取定 $a \in E$，定义 $E_1 = \{z \in E \mid \text{存在连接}a\text{和}z\text{的道路}\}$，$E_2 = \{z \in E \mid \text{不存在连接}a\text{和}z\text{的道路}\}$。则 $E = E_1 \cup E_2$，E_1, E_2 都是开集，由前一定理 $E_1 = \varnothing$ 或 $E_2 = \varnothing$，显然 $E_1 \neq \varnothing$，故 $E_2 = \varnothing$。

"$\Rightarrow$"：假设 E 不连通，则存在非空不交开集 $E_1, E_2\ s.t.\ E = E_1 \cup E_2$，任取 $z_1 \in E_1$，$z_2 \in E_2$，则存在道路 $\gamma\colon [0,1] \to E$，$\gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2$。令 $A = \{t \in [0,1] \mid \gamma(s) \in E_1,\ 0 \leq s < t\}$，则 $A \neq \varnothing$，令 $t^* = \sup A$，$\gamma(t^*) \in E_1 \cup E_2$，若 $\gamma(t^*) \in E_1$，由于 E_1 为开集，$\exists\, \delta > 0,\ s.t.\ t^* + \delta \in A$，矛盾。若 $\gamma(t^*) \in E_2$，类似。 $\square$

但一般而言，道路连通必然连通，但连通未必道路连通，下面是一个经典的例子，称为**拓扑学家的正弦曲线 (Topologist's sine curve)**。

例 0.1. 考虑 $E = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x < 1\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$，则 E 是连通的，但不道路连通。

评论. 一般地，如果 E 连通，则 $\overline{E}$ 也连通。(习题)

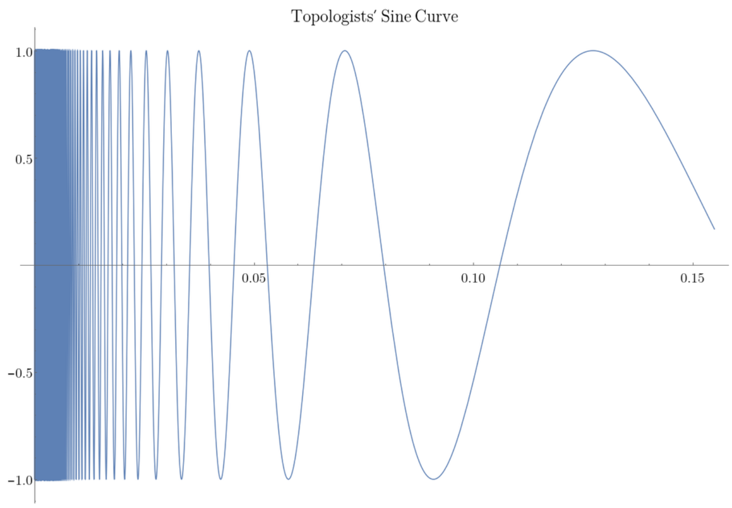

图 1: 拓扑学家的正弦曲线

我们称 γ 为**可求长曲线**，若设 π 是 $[0,1]$ 的分割，则 $\sup\limits_{\pi}\sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|<+\infty$。设 $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$，则 $\gamma'(t)=x'(t)+iy'(t)$。那么 γ 为可求长曲线 $\Leftrightarrow$ $x(t),y(t)$ 为有界变差函数。

如果 $x(t),y(t)$ 为 C^1 函数且 $\gamma'(t)\neq 0$，则称 γ 为**光滑曲线**，此时 γ 的长度 $|\gamma|=\int_0^1|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}\,t$。

定义 0.3. 非空的连通开集称为**区域**。

定理 0.3. (*Jordan* 分割定理)：一条简单闭曲线 γ 把复平面分成两个区域，一个是有界的，称为 γ 的内部，另一个是无界的，称为 γ 的外部。

评论. 该定理的证明较为复杂，我们这里不加证明地承认它。

定义 0.4. 区域 D 称为**单连通**，如果 D 中的任意简单闭曲线的内部仍在 D 中。

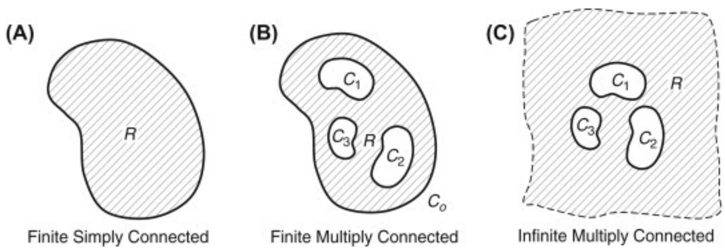

图 2: 连通的情形

Part II

全纯函数

设 $D \subset \mathbb{C}$ 为区域，$f\colon D \to \mathbb{C}$ 为映射，f 的表示：

$$f(z) = f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y).$$

1　复变函数的导数

定义 1.1. 设 $f\colon D \to \mathbb{C}$，$z_0 \in D$，如果

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在，则称 f 在 z_0 处**可导**。

如果 $\exists\, A \in \mathbb{C}$，$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(|\Delta z|)$，$|\Delta z| \to 0$，则称 f 在 z_0 处**可微**。

定理 1.1. f 在 z_0 处可导 $\Leftrightarrow$ f 在 z_0 处可微，且 $A = f'(z_0)$。

评论. f 在 z_0 处可微 $\Rightarrow$ f 在 z_0 处连续。

反之不然，例如 $f(z) = \overline{z}$，则 $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \overline{z_0}}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$，极限不存在。

定义 1.2. 若 f 在区域 D 中每点处都可导，则称 f 在 D 上**全纯 (Holomorphic)** 或**解析 (Analytic)**。

评论. 称 f 在 z_0 处全纯，如果 f 在 z_0 的某个邻域中全纯。

2　Cauchy-Riemann 方程

定义 2.1. 设 $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$，$z_0 = x_0 + iy_0 \in D$，若 $U(x,y), V(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微，则称 f 在 z_0 处**实可微**。

进一步分析函数的结构，

$$
\begin{aligned}
f(z_0+\Delta z)-f(z_0) &= (U(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-U(x_0,y_0))+i\,(V(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-V(x_0,y_0)) \\
&= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\Delta y\right)+o(|\Delta z|) \\
&= \left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial U}{\partial y}+i\frac{\partial V}{\partial y}\right)\Delta y+o(|\Delta z|) \\
&=: \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(|\Delta z|) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\Delta z+\overline{\Delta z}\right)+\frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\Delta z-\overline{\Delta z}\right)+o(|\Delta z|) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)f\cdot\Delta z+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)f\cdot\overline{\Delta z}+o(|\Delta z|) \\
&=: \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{\Delta z}+o(|z|).
\end{aligned}
$$

定理 2.1. f 在 z_0 处可微 $\Leftrightarrow$ f 在 z_0 处实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)=0$。

当 f 可微时，$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}$。

评论. 我们解释一下为什么会出现 $\overline{z}$。

$f(z)=f(x+iy)$ 可以看成 x,y 及 $z,\overline{z}$ 的函数。$f(x,y)=f(\frac{z+\overline{z}}{2},\frac{z-\overline{z}}{2i})$，$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{1}{2i}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})f$，对 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ 也有类似的结果。

要使 f 可微，则

$$
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(U+iV)}{\partial x}+i\frac{\partial(U+iV)}{\partial v}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]=0
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} U_x=V_y, \\ U_y=-V_x. \end{cases}
$$

称为 **Cauchy-Riemann 方程**。进而

$$
f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(U+iV)}{\partial x}-i\frac{\partial(U+iV)}{\partial y}\right)=U_x+iV_x.
$$