Lec19 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 5 月 9 日

我们已经知道 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k$ 为圆周 $(k>0)$。

反过来，设 γ: $|z-a| = R$ 为一个圆周，设 z_1, z_2 为 γ 的对称点。则 $|\frac{z-z_1}{z-z_2}| = \frac{|z_1-a|}{R} = \frac{R}{|z_2-a|}$。

定理 5.7. 任何圆周都可以表示为 $|\frac{z-z_1}{z-z_2}| = k$(常数)$>0$，其中 z_1, z_2 为圆周的对称点。

分式线性变换 $w = f(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2}$ 把圆族 $C_k : |\frac{z-z_1}{z-z_2}| = k\ (k>0)$ 映为 $w-$ 平面上的圆族 $|w| = k$。

定理 5.8. 分式线性变换将圆周映为圆周且将对称点映为对称点。

证明. 设 γ: $|\frac{z-z_1}{z-z_2}| = k$, $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$，则 $z = f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a} \Rightarrow$

$$\left|\frac{\frac{-dw+b}{cw-a} - z_1}{\frac{-dw+b}{cw-a} - z_2}\right| = k \Rightarrow \left|\frac{(cz_1+d)w - (az_1+b)}{(cz_2+d)w - (az_2+b)}\right| = k.$$

(1) 若 $cz_1 + d \neq 0$, $cz_2 + d \neq 0$，则 $|\frac{w-f(z_1)}{w-f(z_2)}| = k'$。

(2) 若 $cz_1 + d = 0$，则 $cz_2 + d \neq 0$ 且 $az_1 + b \neq 0$，故 $|w - f(z_2)| = k' > 0$ 为圆周 Γ，此时 $f(z_1) = \infty \Rightarrow f(z_1), f(z_2)$ 关于 Γ 对称。

(3) 若 $cz_2 + d = 0$，类似。

□

注意 $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z$ 最多只有 2 个解，除非 $f = \mathrm{id}$。

故当 L_1, L_2 同时将三个不同点 z_1, z_2, z_3 都映为 w_1, w_2, w_3，则

$$L_1^{-1} \circ L_2(z_i) = z_i\ (i=1,2,3) \Rightarrow L_1^{-1} \circ L_2 = \mathrm{id} \Rightarrow L_1 = L_2.$$

给定 $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ 将 z_2, z_3, z_4 分别映为 $0, 1, \infty$ 的分式线性变换 $L^*(z) = \frac{z-z_2}{z-z_4} \cdot \frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}$。

若 $z_i = \infty\ (2 \le i \le 4)$，则在上式中令 $z_i \to \infty$，例如 $z_2 = \infty$，则 $L^*(z) = \frac{z_3-z_4}{z-z_4}$。

定义 5.3. 给定 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$，定义 z_1, z_2, z_3, z_4 的**交比**为

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = L^*(z_1) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}.$$

定理 5.9. 分式线性变换 L 保持交比不变，即

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (L(z_1), L(z_2), L(z_3), L(z_4)).$$

证明. 设 $w_i = L(z_i)$，则 $L^* \circ L^{-1}$ 将 w_2, w_3, w_4 映为 $0, 1, \infty$，故

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = L^* \circ L^{-1}(w_1) = L^*(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

□

将三点 z_1, z_2, z_3 映为 w_1, w_2, w_3 的唯一的分式线性变换的方程为 $(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$，即

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}. \qquad (*)$$

几个重要的分式线性变换：

(1) 将上半平面映为单位圆盘。

于是实轴被映为 $|w| = 1$[1]。设 $L(\alpha) = 0$, $\mathrm{Im}\alpha > 0$，则 $L(\overline{\alpha}) = \infty$，故 $L(z) = \frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} \cdot \lambda \ (\lambda \in \mathbb{C})$，

$$1 = |L(1)| = \left| \frac{1-\alpha}{1-\overline{\alpha}} \cdot \lambda \right| = |\lambda| \Rightarrow L(z) = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}.$$

(2) 将 $|z| < 1$ 映为 $|w| < 1$。

设 $L(\alpha) = 0 \ (|\alpha| < 1)$，则 $L(\frac{1}{\overline{\alpha}}) = \infty$，故

$$L(z) = \frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\overline{\alpha}}} \cdot \lambda = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \cdot \lambda'$$

$$1 = |L(1)| = \left| \frac{1-\alpha}{1-\overline{\alpha}} \cdot \lambda' \right| = |\lambda'| \Rightarrow L(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}.$$

(3) 将上半平面映为上半平面。

设 $w = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$，将实轴映为实轴，由 (*) 知 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$。

$$w - \overline{w} = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} = \frac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2}, \ \mathrm{Im}z > 0.$$

故 $\mathrm{Im}w > 0 \Leftrightarrow ad - bc > 0$。

[1]因为边界被映射到边界。