Lec18 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 5 月 4 日

定理 5.3. *Schwarz* 引理：设 $f\colon B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯且 $f(0)=0$，则

(1) $|f(z)|\le|z|$；

(2) $|f'(0)|\le 1$；

(3) 若存在 $z_0\neq 0$ 使得 $|f(z_0)|=|z_0|$ 或者 $|f'(0)|=1$，则存在 $\theta\in\mathbb{R}\ s.t.\ f(z)=e^{i\theta}z$。

证明. (1) $f(0)=0$，故 $f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots=zg(z)$, $g(0)=a_1=f'(0)$，$g(z)$ 在 $B(0,1)$ 中全纯。

任取 $0<r<1$，当 $|z|=r$ 时 $|g(z)|=\frac{|f(z)|}{|z|}\le\frac{1}{r}$，由最大模，当 $|z|<r$ 时 $|g(z)|\le\frac{1}{r}$，令 $r\to 1$，当 $|z|<1$ 时，$|g(z)|\le 1\Rightarrow|f(z)|\le|z|$。

(2) $|f'(0)|=|g(0)|\le 1$。

(3) 若 $\exists\, z_0\neq 0\ s.t.\ |f(z_0)|=|z_0|$，则 $|g(z_0)|=1$。由最大模原理，$g(z)=\mathrm{Const.}=g(z_0)=e^{i\theta}$, $\exists\,\theta$，故 $f(z)=e^{i\theta}z$。

若 $|f'(0)|=1$，则 $|g(0)|=1\Rightarrow g(z)=\mathrm{Const.}$。

□

定义 5.1. 设 D 为区域，$f\colon D\to D$ 单叶全纯且 $f(D)=D$，则称 f 为域 D 上的一个**全纯自同构 (Automorphism)**。

D 上全体全纯自同构的集合记为 $\mathrm{Aut}(D)$，$\mathrm{Aut}(D)$ 在复合下构成群，称为 D 的全纯自同构群。

设 $|\alpha|<1$，定义 $\varphi_\alpha(z)=\frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}$, $\varphi_\alpha(\alpha)=0$, $\varphi_\alpha(0)=\alpha$, $|\varphi_\alpha(z)|<1$。且

$$\varphi_\alpha\circ\varphi_\alpha(z)=\frac{\alpha-\frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}}{1-\overline{\alpha}\cdot\frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}}=\frac{-\alpha\overline{\alpha}z+z}{1-|\alpha|^2}=z.$$

这就意味着 φ_α 可逆且 $\varphi_\alpha^{-1}=\varphi_\alpha$。

定理 5.4.

$$\mathrm{Aut}(B(0,1))=\left\{f(z)=e^{i\theta}\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\,\middle|\,\theta\in\mathbb{R},\ |a|<1\right\}.$$

证明. 设 $f\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$，设 $f(a)=0$ ($|a|<1$)，令 $g=f\circ\varphi_a$, $g(0)=f\circ\varphi_a(0)=0$，那么由 S-引理，$|g(z)|\le|z|$ 对 $|z|<1$，由于 g 可逆，$g^{-1}\in\mathrm{Aut}(B(0,1))$, $g^{-1}(0)=0$。由 S-引理，$|g^{-1}(z)|\le|z|$ 对 $|z|<1$，令 $z=g(w)$，则 $|w|\le|g(w)|$ 对 $|w|<1$。

从而 $|g(z)|=|z|$ 对 $|z|<1$，由 S-引理，$g(z)=e^{i\theta}z,\ \exists\,\theta$，于是 $f=f\circ\varphi_a\circ\varphi_a=g\circ\varphi_a$。 □

定理 5.5. *Schwarz-Pick*：设 $f\colon B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯，对于 $a\in B(0,1),\ f(a)=b$，则

(1) $\forall\,|z|<1,\ |\varphi_b\circ f(z)|\le|\varphi_a(z)|$；

(2) $\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\le\frac{1}{1-|z|^2}$；

(3) (1) 或 *(2)* 中等号成立，则 $f\in\operatorname{Aut}(B(0,1))$。

证明. (1) 令 $g=\varphi_b\circ f\circ\varphi_a$，则 $g(0)=0$。由 S-引理，$|g(z)|\le|z|$，即 $|\varphi_b\circ f\circ\varphi_a(z)|\le|z|,\ \forall\,z$。令 $z=\varphi_a(w)$，则 $|\varphi_b\circ f(w)|\le|\varphi_a(w)|$。

(2) 由 S-引理，$|g'(0)|\le1$，即 $|(\varphi_b\circ f\circ\varphi_a)'(0)|\le1$，即 $|\varphi_b'(b)f'(a)\varphi_a'(0)|\le1$。易见 $\varphi_a'(z)=\frac{|a|^2-1}{(1-\bar{a}z)^2},\ \varphi_a'(0)=|a|^2-1,\ \varphi_a'(a)=\frac{-1}{1-|a|^2}$，故 $\frac{1}{1-|b|^2}|f'(a)|(-|a|^2+1)\le1\Rightarrow\frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2}\le\frac{1}{1-|a|^2}$。

(3) 若等号成立，则 $g=\varphi_b\circ f\circ\varphi_a$ 为旋转映射 $\Rightarrow f=\varphi_b\circ g\circ\varphi_a\in\operatorname{Aut}(B(0,1))$。

□

例 5.7. 设 $f\colon B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯，证明：

$$\frac{||f(0)|-|z||}{1-|f(0)|\cdot|z|}\le|f(z)|\le\frac{|f(0)|+|z|}{1-|f(0)|\cdot|z|}.$$

证明. 左边不等号不成立，如 $f(z)=z^2$。

另一方面，由 S-P 定理，$|\varphi_{f(0)}\circ f(z)|\le|\varphi_0(z)|=|z|$，

$$\begin{aligned}|f(z)|=|\varphi_{f(0)}\circ(\varphi_{f(0)}\circ f)(z)|&=\frac{|f(0)-\varphi_{f(0)}\circ f(z)|}{|1-\overline{f(0)}\varphi_{f(0)}\circ f(z)|}\\&=\frac{|f(0)|+|z|}{1-|\overline{f(0)}|\cdot|\varphi_{f(0)}\circ f(z)|}\le\frac{|f(0)|+|z|}{1-|f(0)|\cdot|z|}.\end{aligned}$$

□

分式线性变换

考虑变换

$$L(z)=\frac{az+b}{cz+d}\ (a,b,c,d\in\mathbb{C},\ ad-bc\neq0).$$

我们有如下事实：

1. $c\neq0$ 时，除去 $z=-\frac{d}{c}$，$L(z)$ 全纯。

   $c=0$ 时，$L(z)=Az+b$，在 $\mathbb{C}$ 上全纯。

2. $L(z)$ 有反函数，$z=L^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a}$。

3. $c\neq0$ 时，规定 $L(-\frac{d}{c})=\infty,\ L(\infty)=\frac{a}{c}$。

   $c=0$ 时，规定 $L(\infty)=\infty$，

   此时，$L\colon\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ 为一对一映射。

4. 分解。$c=0$ 时 $L(z)=Az+B$, $A=re^{i\theta}$ $(r>0)$，于是由旋转 $z_1=e^{i\theta}z$，伸缩 $z_2=rz_1$，平移 $L(z)=z_2+B$ 复合而成。
$c\neq 0$ 时，$L(z)=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{z+\frac{d}{c}}$，这里反演 $z\mapsto\frac{1}{z}$ 可以分解为 $z\mapsto\frac{1}{\bar{z}}$, $z\mapsto\bar{z}$，分别为关于圆周和实轴的对称。

定义 5.2. 设 γ: $|z-a|=R$，如果 $z_2-a=\frac{R^2}{\overline{z_1-a}}$，则称 z_1,z_2 关于 γ 对称。

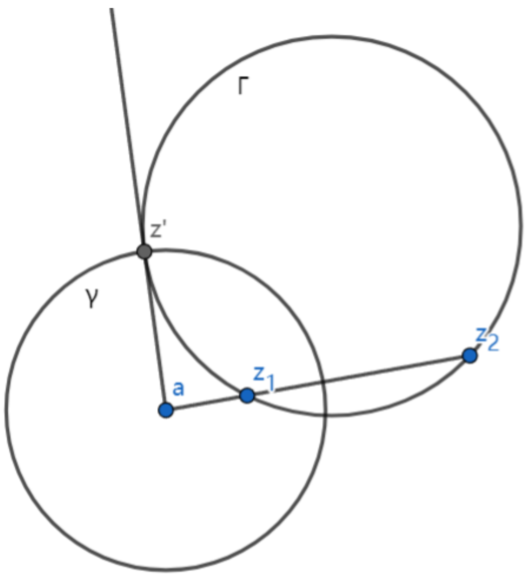
评论. 蕴含了 a,z_1,z_2 共线，且 $\frac{|z_1-a|}{R}=\frac{R}{|z_2-a|}$。

命题 5.6. 过圆周 γ 的两个对称点 z_1,z_2 的任意圆周与 γ 正交。

证明. 设 Γ 是过 z_1,z_2 的圆周，过 a 点作 Γ 的切线，切点为 z'。由切割线定理，

$$|z'-a|^2=|z_1-a||z_2-a|=R^2\Rightarrow z'\in\Gamma.$$

于是 γ 与 Γ 在 z' 处正交。 □



圆周的表示

(1) 考虑 $\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|}=k$ ($z_1,z_2\in\mathbb{C}$为给定的两点)。

(i) $k\neq 1$, $|z-z_1|=k|z-z_2|$。
易见，当 $|z_1|=\lambda|z_2|$ 时，$|z_1-\lambda^2 z_2|=\lambda|z_1-z_2|$，故 $|z-z_1-k^2(z-z_2)|=k|(z-z_1)-(z-z_2)|$，即

$$\left|z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right|=\frac{k}{|1-k^2|}|z_1-z_2|.$$

可以验证，z_1,z_2 为这个圆周的对称点。

(ii) $k=1$，则为直线 (在 $\mathbb{C}_\infty$ 中可以看成圆周)。