Lec17 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 27 日

5 最大模原理和 Schwarz 引理

定理 5.1. 设 f 是区域 D 中非常值全纯函数，则 $|f(z)|$ 在 D 中取不到最大值。

证明. f 非常值全纯 $\Rightarrow f$ 为开映射。设 $z_0 \in D$ 且 $|f(z_0)|$ 取到最大值。取 $\delta > 0\, s.t.\, B(z_0, \delta) \subset D$，则 $f(B(z_0, \delta))$ 为开集。取 $w \in f(B(z_0, \delta))$ 且 $|w| > |f(z_0)|$，取 $z \in B(z_0, \delta)$ 且 $f(z) = w$，则 $|f(z)| > |f(z_0)|$，与 z_0 的取法矛盾。 □

定理 5.2. 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为有界区域，$f \in H(D) \cap C(\overline{D})$。若 f 非常值，则 f 的最大模在 D 的边界上达到。

证明. $\overline{D}$ 为紧集 $\Rightarrow |f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 中有最大值。由定理 5.1，最大值只能在 ∂D 中取到。 □

例 5.1. 当 D 无界时，最大模不一定在 ∂D 上取到。例如 $f(z) = e^{e^z}$, $z \in D = \{z \mid |\mathrm{Im} z| < \frac{\pi}{2}\}$，当 $z \in \partial D$, $z = x \pm \frac{\pi}{2}i$, $e^z = e^x \cdot e^{\pm\frac{\pi}{2}i} = \pm i e^x$, $|e^{e^z}| = |e^{\pm i e^x}| = 1$，当 $z = x \in \mathbb{R}$ 且 $x \to +\infty$ 时，$e^{e^x} \to +\infty$。

例 5.2. 用最大模原理证明代数学基本定理。

证明. 设 $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\ (a_n \neq 0)$，假设 $P(z)$ 无零点，则 $\frac{1}{P(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯。由于 $\lim\limits_{z\to\infty} |P(z)| = +\infty$, $\exists\, R > 0$，当 $|z| = R$ 时 $|P(z)| > |P(0)|$, $|\frac{1}{P(z)}| < |\frac{1}{P(0)}|$，与定理 5.2 矛盾。 □

例 5.3. 设 $f \in H(B(\infty, R)) \cap C(\overline{B(\infty, R)})$，并且 $a = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 存在。证明：若 f 非常数，则 $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ 是 $[R, +\infty)$ 上的严格递减函数。

证明. 令 $g(z) = \begin{cases} f(\frac{1}{z}), & z \neq 0, \\ a, & z = 0 \end{cases}$，则 $g(z)$ 在 $0 < |z| < \frac{1}{R}$ 中全纯且在 $z = 0$ 处连续 $\Rightarrow g(z)$ 在 $|z| < \frac{1}{R}$ 中全纯。

由定理 5.2，当 $R < R_1 < R_2$ 时 $\frac{1}{R_2} < \frac{1}{R_1}$, $\max\limits_{|z|=\frac{1}{R_2}} |g(z)| < \max\limits_{|z|<\frac{1}{R_1}} |g(z)|$，即 $\max\limits_{|z|=R_2} |f(z)| < \max\limits_{|z|=R_1} |f(z)|$。 □

例 5.4. Hadamand 三圆定理：$D: 0 < r_1 < |z| < r_2$, $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$。证明：$\log M(r)$ 在 $[r_1, r_2]$ 上是 $\log r$ 的凸函数，即

$$\log M(r) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_2).$$

证明. 只需证 $\log M(r) \leq s \log M(r_1) + (1-s) \log M(r_2)$。

取 $\alpha \in \mathbb{R}\ s.t.\ M(r_1) \cdot r_1^\alpha \leq M(r_2) \cdot r_2^\alpha$，即 $\alpha = \frac{\log M(r_1) - \log M(r_2)}{\log r_2 - \log r_1}$，如果对 $\forall\, r \in (r_1, r_2)$, $M(r) \cdot r^\alpha \leq M(r_1) r_1^\alpha$，则

$$\log M(r) + \alpha \log r \leq \log M(r_1) + \alpha \log r_1,$$

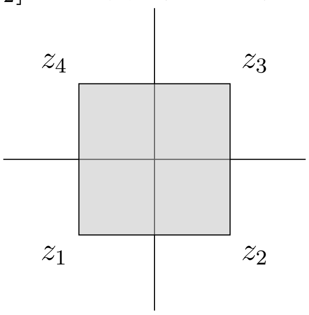
即得结论。

于是令 $g(z) = z^\alpha f(z)$，对 $g(z)$ 用最大模原理。(稍有瑕疵)

考虑 $F(z) = |z|^\alpha \cdot |f(z)|$，则 $\max\limits_{|z|=r_1} F(z) = \max\limits_{|z|=r_2} F(z) = A$。下证 $\max\limits_{z \in \overline{D}} F(z) = A$。

否则存在 $z_0 \in D\ s.t.\ F(z_0) = \sup\{F(z) \mid z \in \overline{D}\} > A$，记 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, $D' = D \setminus \{re^{i(\theta_0+\pi)} \mid r_1 < r < r_2\}$，$D'$ 为不含 0 的单连通区域，故 $z^\alpha f(z)$ 在 D' 中有单值分支，记为 g。则 g 在 D' 中取到最大模，故 g 为常值函数，即 $|g(z)| = A$，与 $|g(z_0)| > A$ 矛盾。 □

例 5.5. D 如图所示，$f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，$M$ 是 $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上的最大值，m 是 $|f(z)|$ 在 $[z_1, z_2]$ 上的最大值，证明：$|f(0)| \leq m^{\frac{1}{4}} \cdot M^{\frac{3}{4}}$。



证明. 令 $F(z) = f(z) \cdot f(iz) \cdot f(i^2 z) \cdot f(i^3 z)$ 全纯，对 $\forall\, z \in \partial D$, $z, iz, i^2 z, i^3 z$ 至少有一个属于 $[z_1, z_2]$，故 $|F(z)| \leq m \cdot M^3$。由最大模，$|F(0)| \leq mM^3$，即 $|f(0)|^4 \leq mM^3$。 □

例 5.6. 设 P 是一个 k 次多项式，当 $|z| = 1$ 时 $|P(z)| \leq 1$，证明：当 $|z| > 1$ 时，$|P(z)| \leq |z|^k$。

证明. 设 $P(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \cdots + a_1 z + a_0\ (a_k \neq 0)$, $P(\frac{1}{z}) = a_k \cdot \frac{1}{z^k} + a_{k-1} \cdot \frac{1}{z^{k-1}} + \cdots + \frac{a_1}{z} + a_0$。令 $f(z) = \begin{cases} z^k P(\frac{1}{z}), & z \neq 0, \\ a_k, & z = 0 \end{cases}$ 在 $|z| < 1$ 中全纯。$z^k P(\frac{1}{z}) = a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_{k-1} z + a_k$，当 $|z| = 1$ 时，$|f(z)| = |z^k||P(\frac{1}{z})| \leq 1$，由最大模，当 $|z| < 1$ 时，$|f(z)| \leq 1$，$|z^k||P(\frac{1}{z})| \leq 1 \Rightarrow |P(\frac{1}{z})| \leq |\frac{1}{z}|^k \Rightarrow |P(w)| \leq |w|^k\ (|w| > 1)$。 □