Lec16 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 25 日

对于 $f(z)=z^2$, $z\in B(0,1)$, $f(0)=0$，0 为 2 阶零点，则 f 在 0 附近是 2 对 1 的，即将两个点打到一个点去。

定理 4.4. 设 $f\in H(D)$, $z_0\in D$, $w_0=f(z_0)$，如果 z_0 是 $f(z)-w_0$ 的 m 阶零点，则 $\exists\,\rho_0>0$，对任意 $0<\rho<\rho_0$，存在 $\delta=\delta(\rho)>0$，使得对任意 $a\in B(w_0,\delta)$, $a\neq w_0$, $f(z)-a$ 在 $B(z_0,\rho)$ 中恰有 m 个不同的零点。

证明. 由零点的孤立性，$\exists\,\rho_0>0\ s.t.\ f(z)-w_0$ 在 $\overline{B(z_0,\rho)}$ 中除去 z_0 外没有其它零点，设 $0<\rho<\rho_0$，记 $\delta=\inf\{|f(z)-w_0|\mid z\in\partial B(z_0,\rho)\}$，$\forall\,a\in B(w_0,\delta)$，记 $F(z)=f(z)-w_0$, $G(z)=f(z)-a$，则当 $z\in\partial B(z_0,\rho)$, $|F(z)-G(z)|=|a-w_0|<\delta\leq|F(z)|$。由 Rouché 定理，$f(z)-a$ 与 $f(z)-w_0$ 在 $B(z_0,\rho)$ 中零点个数相同，即 m 个。

为证 m 个零点两两不同，可能需要将 ρ_0 再减小一些。不妨设 $m\geq 2$，则 $f(z_0)=w_0$ 且 $(f(z)-w_0)'(z_0)=0$，即 $f'(z_0)=0$，f 不是常数 $\Rightarrow z_0$ 为 f' 的孤立零点，取 $\rho_0>0$ 满足

(1) z_0 为 $f(z)-w_0$ 在 $B(z_0,\rho_0)$ 中唯一零点；

(2) z_0 为 $f'(z)$ 在 $B(z_0,\rho_0)$ 中唯一零点。

重复上述证明，易见 $f(z)-a$ 在 $B(z_0,\rho)$ 中的零点都是 1 阶的，从而是 m 个不同的零点。 □

推论. 设 $f\in H(D)$, $z_0\in D$, $w_0=f(z_0)$，则对充分小的 $\rho>0$, $\exists\,\delta=\delta(\rho)>0\ s.t.\ f(B(z_0,\rho))\supset B(w_0,\delta)$。

定义 4.2. 设 $D\subset\mathbb{C}$ 为区域，$f\colon D\to\mathbb{C}$ 称为**开映射**，如果对任何开集 $U\subset D$，$f(U)$ 为开集。

定理 4.5. 设 f 为域 D 上非常数的全纯映射，则

(1) f 为开映射；

(2) $f(D)$ 为 $\mathbb{C}$ 中的区域。

证明. (1) 设 $U\subset D$ 为开集，任取 $w_0\in f(U)$, $\exists\,z_0\in U$, $f(z_0)=w_0$，取 $\rho>0\ s.t.\ B(z_0,\rho)\subset U$，由推论，$\exists\,\delta>0\ s.t.\ B(w_0,\delta)\subset f(B(z_0,\rho))\subset f(U)\Rightarrow f(U)$ 为开集。

(2) D 连通 $\Leftrightarrow D$ 道路连通 $\Rightarrow f(D)$ 道路连通。

□

定理 4.6. 若 f 为域 D 中单叶全纯函数，则对 $\forall\, z \in D,\ f'(z) \neq 0$。

证明. 假设存在 $z_0 \in D,\ f'(z_0) = 0$，则 z_0 为 $f(z) - w_0$ 的 m 阶零点且 $m \geq 2$，由定理 4.4(加强版) 知 f 在 z_0 附近不是单射，矛盾。 □

评论. 逆命题不成立。如 $f(z) = e^z$，但局部是对的。

定理 4.7. 设 $f \in H(D)$，如果 $z_0 \in D$ 且 $f'(z_0) \neq 0$，则 f 在 z_0 的某个邻域中是单叶的。

证明. $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow z_0$ 为 $f(z) - f(z_0)$ 的 1 阶零点。由定理 4.4，$\exists\, \rho > 0,\ \exists\, \delta > 0\ s.t.$ 对 $\forall\, a \in B(f(z_0), \delta),\ f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中有唯一的零点。再由 f 在 z_0 处连续，故 $\exists\, \rho_1 < \rho\ s.t.\ f(B(z_0, \rho_1)) \subset B(f(z_0), \delta) \Rightarrow f|_{B(z_0,\rho_1)}$ 为单射。 □

定理 4.8. 设 f 为域 D 上的单叶全纯函数，则逆映射 $f^{-1}\colon f(D) \to D$ 为全纯函数且 $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$，其中 $w = f(z) \in f(D)$。

证明. f 为开映射 $\Rightarrow f^{-1}$ 为连续映射。

$$\lim_{w\to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}\ (f'(z_0) \neq 0).$$

□

定义 4.3. 单叶全纯函数也称为**双全纯函数**。

定理 4.9. *Hurwitz*：设 f_n 为域 D 上的一列全纯函数，在 D 中紧一致收敛于不恒为零的函数 f，设 γ 为 D 中的可求长简单闭曲线，γ 的内部位于 D 中且不经过 f 的零点，则存在 N，当 $n \geq N$ 时，f_n 与 f 在 γ 内部的零点个数相同。

证明. 由 W-定理，f 全纯，f 在 γ 上无零点，故

$$\min\{|f(z)| \mid z \in \gamma\} = \varepsilon > 0.$$

在 γ 上 $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \exists\, N$，当 $n > N$ 时，对 $\forall\, z \in \gamma$，

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)|.$$

由 Rouché 定理，$f_n(z), f(z)$ 在 $\operatorname{int}(\gamma)$ 中零点个数相同。 □

定理 4.10. 设 f_n 为域 D 上的一列单叶全纯函数，在 D 中紧一致收敛于 f。如果 f 不是常数，则 f 为 D 中的单叶全纯函数。

证明. 若 f 不是常数，也不单叶，则存在 $z_1 \neq z_2\ s.t.\ f(z_1) = f(z_2) = w_0$。记 $F(z) = f(z) - w_0,\ F(z_1) = F(z_2) = 0$，$z_1, z_2$ 为 $F(z)$ 的孤立零点。故 $\exists\, \varepsilon > 0\ s.t.\ \overline{B(z_1,\varepsilon)} \cap \overline{B(z_2,\varepsilon)} = \varnothing$ 且 $F(z)$ 在 $\overline{B(z_1,\varepsilon)}, \overline{B(z_2,\varepsilon)}$ 中无其它零点。令 $F_n(z) = f_n(z) - w_0$，则 $F_n(z)$ 在 D 中紧一致收敛于 $F(z)$，由定理 4.9，$\exists\, N$，当 $n > N$ 时，$F_n(z)$ 在 $B(z_1, \varepsilon)$ 与 $B(z_2, \varepsilon)$ 中各有一个零点，记为 z_n', z_n''，则 $z_n' \neq z_n''$，$f_n(z_n') = w_0 = f_n(z_n'')$，与 f_n 单射矛盾。 □

例 4.7. 设 $r > 0$，证明：当 n 充分大时，$f_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$ 在 $B(0,r)$ 中无零点。

证明. $f_n(z)$ 在 $\overline{B(0,1)}$ 中一致收敛于 e^z，而 e^z 在 $B(0,r)$ 中无零点，由 Hurwitz 定理，n 充分大时 f_n 在 $B(0,r)$ 中无零点。 $\square$

例 4.8. 用辐角原理证明代数学基本定理：

证明. 设 $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $Q(z) = a_n z^n$ $(a_n \neq 0)$，那么取 r 足够大，在 $\partial B(0,r)$ 上 $P(z), Q(z)$ 无零点，且 $|P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$，故 $P(z)$ 在 $B(0,r)$ 中零点个数与 $Q(z)$ 一致，而 $Q(z) \circ \partial B(0,r)$ 的环绕指数为 n，从而 $P(z)$ 有零点。 $\square$