Lec15 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 23 日

讲解部分期中考试题。

1、设 E 连通，证明 $\overline{E}$ 连通。

证明. 假设 $\overline{E}$ 不连通，则存在非空不交集 $E_1, E_2\ s.t.\ \overline{E} = E_1 \cup E_2$ 且 $\overline{E_1} \cap E_2 = \varnothing$, $E_1 \cap \overline{E_2} = \varnothing$。

那么 $E = E \cap \overline{E} = (E \cap E_1) \cup (E \cap E_2)$，而 $\overline{E \cap E_1} \cap (E \cap E_2) \subset \overline{E_1} \cap E_2 = \varnothing$, $E \cap E_1 \cap \overline{E \cap E_2} \subset E_1 \cap \overline{E_2} = \varnothing$。

不妨设 $E \cap E_2 = \varnothing$，则 $E \subset E_1$, $\overline{E} \subset \overline{E_1}$, $E_2 \subset \overline{E} \cap E_2 \subset \overline{E_1} \cap E_2 = \varnothing$，矛盾。 $\square$

2、$f\colon D \to \mathbb{C}$ 连续，f 恒不为零，若 f^2 全纯，证明 f 全纯。

证明. $\forall\, z_0 \in D$, $\frac{f^2(z) - f^2(z_0)}{z - z_0} = (f(z) + f(z_0)) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$。 $\square$

3、$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z - 1$, $a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$，$p(z)$ 在 $|z| < 1$ 中无零点，求 $P(1)$。

证明. 设 $P(z)$ 的根 $z_1, z_2, \cdots, z_n$，则 $(-1)^n z_1 \cdots z_n = -1$，于是 $|z_j| \geq 1 \Rightarrow |z_j| = 1\ (1 \leq j \leq n)$，由 $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为连续函数，$P(0) = -1$，$P(+\infty)$，$P(z)$ 在 $(0, +\infty)$ 中有零点，只能是 1，即 $P(1) = 0$。 $\square$

4、$u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 调和函数且对 $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $u(z) \leq 2|\log|z|| + 1$，证明 u 为常数。

证明. $\mathbb{C}$ 单连通，$\exists\, v\ s.t.\ f(z) = u + iv$ 全纯。

令 $F(z) = e^{f(z)} = e^{u+iv} \Rightarrow |F(z)| = e^u \leq e^{2|\log|z||+1}$，取 $r > 1$，

$$F^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{F(z)}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}\, z$$

$$\Rightarrow |F^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{e^{2\log r + 1}}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{e \cdot n!}{r^{n-2}}.$$

当 $n \geq 3$ 时，令 $r \to +\infty$，得 $F^{(n)}(0) = 0$。那么 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n$ 为多项式，而 $F(z) = e^{f(z)}$ 恒不为零，由代数学基本定理，$F(z)$ 只能是常数。 $\square$

回到正文。

定理 4.3. *Rouché*：设 $f,g\in H(D)$，γ 是 D 中可求长简单闭曲线，γ 的内部位于 D 中，如果当 $z\in\gamma$ 时

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|.$$

则 f 与 g 在 γ 的内部零点个数相等。

证明. (From Stein) 令 $F_t(z)=f(z)+t\cdot(g(z)-f(z)),\ 0\le t\le 1,\ F_0(t)=f(z),F_1(z)=g(z)$。

当 $z\in\gamma$ 时 $|f(z)-g(z)|<|f(z)|\Rightarrow t\cdot|f(z)-g(z)|<|f(z)|\ (0\le t\le 1)\Rightarrow F_t(z)\neq 0,\ \forall\, z\in\gamma$。

于是 F_t 在 γ 中零点个数 $N_{f_t}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{F_t'(z)}{F_t(z)}\,\mathrm{d}\,z$，由于 $\frac{F_t'(z)}{F_t(z)}$ 关于 t 连续，故 N_{f_t} 关于 t 连续。由于 N_{f_t} 只取整数，故 N_{f_t} 为常数。 □

例 4.3. 求方程 $z^4-6z+3=0$ 在圆环 $1<|z|<2$ 中的根的个数。

解. (1) 在 $|z|=1$ 上，取 $f(z)=-6z,\ g(z)=z^4-6z+3$，那么

$$|f(z)-g(z)|=|z^4+3|\le 4<|f(z)|$$

$\Rightarrow$ 方程在 $|z|<1$ 中有一个根。

(2) 在 $|z|=2$ 上，取 $f(z)=z^4,\ g(z)=z^4-6z+3$，那么

$$|f(z)-g(z)|=|-6z+3|\le 15<|f(z)|$$

$\Rightarrow$ 方程在 $|z|<2$ 中有 4 个根。

(3) 当 $|z|=1$ 时，$|z^4-6z+3|\ge 2\Rightarrow$ 方程在 $|z|=1$ 上无根。

综上，方程在 $1<|z|<2$ 中有 3 个根。 □

例 4.4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in B(0,1),\ f(z)=\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k-z}{1-\overline{a_k}z}$，证明：若 $|b|<1$，则 $f(z)-b$ 在 $B(0,1)$ 中恰有 n 个根。

证明. 当 $|z|=1$ 时，$|f(z)-b-f(z)|=|b|<1=|f(z)|$，于是 $f(z)-b$ 在 $|z|<1$ 中零点个数 $=f(z)$ 在 $|z|<1$ 中零点个数 $=n$。 □

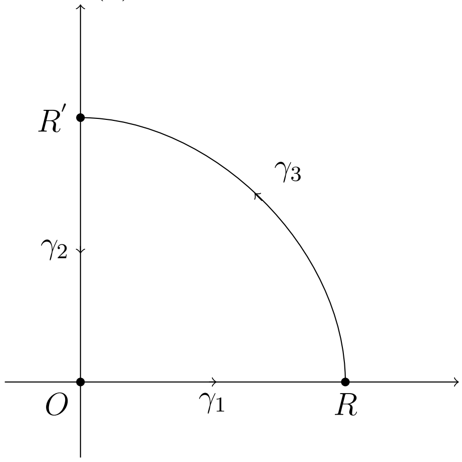
例 4.5. 设 f 在域 D 上全纯，γ 为 D 中的简单闭曲线，γ 的内部位于 D 中，若 f 在 γ 上只取实数，证明 f 为常数。

证明. 任取 $z_0=a+ib\ (b>0)$，取 $g(z)=f(z)-z_0$，当 $z\in\gamma$ 时，$\mathrm{Im}g(z)<0$，若 $g\circ\gamma$ 绕原点的圈数 $=0$，由辐角原理，$g(z)$ 在 γ 内部无零点，即对 $\forall\, z\in\mathrm{int}(\gamma),\ f(z)\neq z_0$。

同理对 $\tilde{z}_0=a+ib\ (b<0),\ f(z)\neq\tilde{z}_0,\ \forall\, z\in\mathrm{int}(\gamma)$，故 $\mathrm{Im}f(z)=0,\ z\in\mathrm{int}(\gamma)$，于是由 C-R 方程，$f$ 在 $\mathrm{int}(\gamma)$ 上为常数，进而由唯一性定理，f 在 D 上为常数。 □

例 4.6. 证明：$z^4+2z^3-2z+10=0$ 在每个象限各有 1 个根。

证明. 设 $P(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 10$。我们如图取一个扇形围道。



当 $z \in \gamma_1$ 时，$z = x > 0$, $P(x) = (x^2-1)(x+1)^2 + 11$，当 $x > 1$ 时 $P(x) > 11$，当 $0 < x < 1$ 时 $P(x) \geq -2 + 11 = 0$，故 $P(z)$ 在 γ_1 上无零点。

当 $R \gg 1$, $z \in \gamma_2$ 时无零点。$z \in \gamma_3$ 时，$P(iy) = y^4 + 10 - 2iy(y+1) \neq 0$。

$P(z)$ 在 γ_1 上取正实数，故 $\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}P(z) = 0$，当 $z \in \gamma_2$ 时，$P(z) = z^4(1 + \frac{2z^3-2z+10}{z^4})$，故 $\Delta_{\gamma_2}P(z) = 4 \times \frac{\pi}{2} + o(1) = 2\pi + o(1)$ $(R \to +\infty)$。而 $P(iy) = (y^4+10)(1 - \frac{2y(y+1)}{y^4+10}i) \Rightarrow \Delta_{\gamma_3}P(z) = o(1)$。从而 $\Delta_{\gamma}P(z) = 2\pi$，于是 $f(z)$ 在第一象限有一个根。

而实系数多项式的根共轭出现，于是第四象限有一个根。进而第二、第三象限也各有一个根。 □