

Lec13 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期: 2023 年 4 月 20 日

我们补充一下例 3.4 的 (2) 的证明。

证明. (2) 要证 $|a_n r^n| \leq 2A(r) - 2\operatorname{Re}f(0)$ ($A(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re}f(z)$)。由

$$\begin{aligned} a_n r^n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (-A(r) + \operatorname{Re}f(z)) e^{-in\theta} d\theta \quad (n \geq 1) \\ \Rightarrow |a_n| r^n &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |-A(r) + \operatorname{Re}f(z)| \cdot |e^{-in\theta}| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (A(r) - \operatorname{Re}f(z)) d\theta = 2A(r) - 2\operatorname{Re}f(0). \end{aligned}$$

后者用到了调和函数的平均值公式。

□

例 3.5. P117.8:(Schwarz 积分公式) $f \in H(B(0, R)) \cap C(\overline{B(0, R)})$, 证明:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} \operatorname{Re}f(e^{i\theta}) d\theta + i\operatorname{Im}f(0).$$

证明. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, 则

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}f(Re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (n \geq 1) \\ a_0 &= f(0) = \operatorname{Re}f(0) + i\operatorname{Im}f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}f(Re^{i\theta}) d\theta + i\operatorname{Im}f(0). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}f(Re^{i\theta}) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot R^{-n} e^{-in\theta} z^n \right] d\theta + i\operatorname{Im}f(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}f(Re^{i\theta}) \left[1 + \frac{2 \frac{z}{Re^{i\theta}}}{1 - \frac{z}{Re^{i\theta}}} \right] d\theta + i\operatorname{Im}f(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} \operatorname{Re}f(Re^{i\theta}) d\theta + i\operatorname{Im}f(0). \end{aligned}$$

□

例 3.6. P117.9: 设 $f \in H(B(0, R)) \cap C(\overline{B(0, R)})$, 则对 $\forall 0 < r \leq R$, 有

$$f'(0) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(re^{i\theta}) e^{-i\theta} d\theta.$$

证明.

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta \\
 \frac{f(z) - f(0)}{z} &= \frac{1}{z} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \operatorname{Re}f(re^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}f(re^{i\theta}) d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Re}f(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - z} d\theta.
 \end{aligned}$$

令 $z \rightarrow 0$, $f'(0) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}f(re^{i\theta}) e^{-i\theta} d\theta$. □

4 辐角原理与 Rouché 定理

定理 4.1. 设 $f \in H(D)$, γ 是 D 中可求长简单闭曲线, γ 的内部位于 D 中, 如果 f 在 γ 上没有零点, 在 γ 的内部有零点 a_1, a_2, \dots, a_k , 阶数分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

证明. 取 $\varepsilon > 0$ s.t. $B(a_j, \varepsilon)$ 两两不交且包含在 γ 的内部 Ω 中, 则 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^k B(a_j, \varepsilon)$ 中全纯, 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k \int_{\partial B(a_j, \varepsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

a_j 是 $f(z)$ 的 α_j 阶零点 $\Rightarrow f$ 在 a_j 的某个邻域中有 $f(z) = (z - a_j)^{\alpha_j} g_j(z)$, $g_j(z)$ 全纯且 $g_j(a_j) \neq 0$, 于是

$$\begin{aligned}
 \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\alpha_j(z - a_j)^{\alpha_j - 1} g_j(z) + (z - a_j)^{\alpha_j} g_j'(z)}{(z - a_j)^{\alpha_j} g_j(z)} = \frac{\alpha_j}{z - a_j} + \frac{g_j'(z)}{g_j(z)} \\
 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a_j, \varepsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \alpha_j.
 \end{aligned}$$

□

设 Γ 是 w -平面上一条不过原点的曲线, 方程为 $w = w(t)$ ($a \leq t \leq b$), $w(t)$ 的辐角记为 $\theta(t)$, 且 $\theta(t)$ 为 t 的连续函数, 记 $\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} w = \theta(b) - \theta(a)$, 称之为曲线 Γ 的辐角增量。

如果 Γ 为不过原点的闭曲线 (可能是非简单的闭曲线), 则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} w = \Gamma \text{ 绕原点的圈数.}$$

例 4.1. $\Gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} i dt}{e^{it}} = 1$.

$\Gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{2it}$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2it} 2i dt}{e^{2it}} = 2$.

定义 4.1. $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w}$ 称为闭曲线 Γ 绕原点的环绕指数 (Winding number)。

定理 4.2. 辐角原理: 设 $f \in H(D)$, γ 为 D 中可求长简单闭曲线, γ 的内部包含在 D 内, 如果 f 在 γ 上无零点, 则 f 在 γ 内部的零点个数等于 $f \circ \gamma$ 绕原点的环绕指数, 即 γ 在 f 下的像绕原点的圈数。

例 4.2. $f(z) = z^2$ 在 $|z| < 1$ 中的零点个数 = 2, 另一方面, 当 z 沿 $|z| = 1$ 绕行一周时, 其像在 w -平面绕原点绕行 2 周。