Lec13 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 18 日

我们回忆 f 全纯 $\Leftrightarrow$ f 解析 $\Rightarrow f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$，那么对于初等函数而言：

(1) $f(z)=e^z,\ f^{(n)}(0)=1\ (n=0,1,2,\cdots),\ e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\ (z\in\mathbb{C})$。

(2) $\cos z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ \sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\log(1-z)\ (|z|<1)$，即 $\log(1+z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}\ (|z|<1)$。

(4) $(1+z)^\alpha=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}z^n\ (|z|<1),\ \begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}:=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$。

定义 3.1. 设 $f(z)$ 在 z_0 处全纯且不恒为零，如果

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\cdots,f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0)\neq 0,$$

则称 z_0 为 f 的 m **阶零点**。

例如 $f(z)=(z-z_0)^m$。

命题 3.3. z_0 为 f 的 m 阶零点 $\Leftrightarrow$ f 在 z_0 的邻域中可以表示为 $f(z)=(z-z_0)^m g(z),\ g(z)$ 在 z_0 全纯且 $g(z_0)\neq 0$。

证明. “$\Rightarrow$”：f 全纯 $\Rightarrow f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$，若收敛半径为 R，则 $f(z)=(z-z_0)^m\left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+\cdots\right]$,括号中级数收敛半径也为 R,设为 $g(z)$,则 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$，$g(z)$ 在 z_0 处全纯且 $g(z_0)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0$。

“$\Leftarrow$”：直接验算即可。 □

定理 3.4. 零点的孤立性：设 f 为域 D 上的全纯函数，若 f 在 D 上不恒为零，则 f 在 D 中的零点是孤立的。即，若 $f(z_0)=0$，则存在 z_0 的邻域 $B(z_0,\varepsilon)$，f 在 $B(z_0,\varepsilon)$ 中除去 z_0 不再有其它零点。

证明. (1) 假设 $\exists\, m\geq 1\ s.t.\ f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$ 且 $f^{(m)}(z_0)\neq 0$。

由命题 3.3，在 z_0 的某个邻域中 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$，$g(z)$ 全纯且 $g(z_0)\neq 0$。$g(z)$ 在 z_0 处连续 $\Rightarrow \exists\,\varepsilon>0\ s.t.\ g(z)\neq 0,\ \forall\, z\in B(z_0,\varepsilon)$。从而 $f(z)$ 在 $B(z_0,\varepsilon)$ 中除去 z_0 外无其它零点。

(2) 假设 $f^{(m)}(z_0)=0\,(m=1,2,\cdots)$。由定理 3.1，$\exists\,\delta>0\ s.t.$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=0,\ \forall\, z\in B(z_0,\delta).$$

任取 $a\in D$，在 D 中取曲线 γ 连接 z_0 和 a，记 $\rho=d(\gamma,\partial D)>0$，取 $\varepsilon=\min\{\delta,\rho\}$，在 γ 上依次取点 $z_0,z_1,\cdots,z_n=a,\ |z_j-z_{j-1}|<\varepsilon\,(j=1,\cdots,n)$，则 f 在 $B(z_0,\varepsilon)$ 中恒为 0，$z_1\in B(z_0,\varepsilon)\Rightarrow f^{(m)}(z_1)=0\,(m\geq 0)$。由定理 3.1，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z-z_1)^n=0,\ z\in B(z_1,\varepsilon)$。

依次下去，f 在 $B(z_{n-1},\varepsilon)$ 中恒为零 $\Rightarrow f(a)=0\Rightarrow f\equiv 0$ 在 D 上。

□

定理 3.5. 唯一性定理：设 f_1,f_2 为域 D 上的全纯函数，如果存在 D 中的点列 $\{z_n\}$，使得 $f_1(z_n)=f_2(z_n)\,(n\geq 1)$ 且 $\lim z_n=a\in D$，则 $f_1=f_2$。

证明. 令 $f(z)=f_1(z)-f_2(z)$，则 $f(z_n)=0\,(n\geq 1)$，于是 $f(a)=\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=0\Rightarrow a$ 不是 f 的孤立零点 $\Rightarrow f=0\Rightarrow f_1=f_2$。□

推论. 设 f_1,f_2 在 D 上全纯，若存在开集 $U\subset D$ 且 $f_1=f_2$ 在 U 上成立，则 $f_1=f_2$ 在 D 上成立。

例 3.1. P155.1：D 为区域，$a\in D$，f 在 $D\setminus\{a\}$ 上全纯且 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=0$，则 f 在 D 上全纯。

证明. 令 $F(z)=\begin{cases}(z-a)f(z), & z\neq a,\\ 0, & z=a.\end{cases}$ 则 $F(z)$ 在 $D\setminus\{a\}$ 中全纯且在 a 处连续，由 Morera 定理，F 在 D 中全纯。设 a 为 $F(z)$ 的 m 阶零点 $(m\geq 1)$，由命题 3.3，$F(z)=(z-z_0)^m g(z)$，$g(z)$ 在 a 处全纯且 $g(a)\neq 0$，从而 $f(z)=(z-z_0)^{m-1}g(z)$ 在 D 上全纯。□

例 3.2. P155.5：是否存在 $f\in H(B(0,1))\ s.t.$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}\,(n\geq 2).$$

解. 令 $g(z)=f(z)-z^3,\ g(\frac{1}{n})=0\,(n\geq 2)$ 且 $g(0)=\lim\limits_{n\to\infty}g(\frac{1}{n})=0$。从而 $g(z)\equiv 0\Rightarrow f(z)=z^3$，与 $f(-\frac{1}{n})=\frac{1}{n^3}$ 矛盾。□

例 3.3. P155.10：若函数 $\frac{1}{\cos z}$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$，则 Euler 数 E_{2n} 满足关系式：

$$E_0=1,$$
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}E_{2k}=0.$$

证明.

$$
\begin{aligned}
1 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!}z^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\right)\\
&= E_0+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{E_{2k}}{(2k)!}(-1)^{n-k}\frac{1}{(2n-2k)!}\right)z^{2n}\\
&= E_0+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\binom{2n}{2k}E_{2k}\right)z^{2n}\\
\Rightarrow & E_0=1,\ \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2n}{2k}E_{2k}=0.
\end{aligned}
$$

□

例 3.4. P155.6：设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\ R>0,\ 0<r<R,\ A(r)=\max\limits_{|z|=r}\mathrm{Re}f(z)$，证明：

(1) $a_nr^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\mathrm{Re}f(re^{i\theta})]e^{in\theta}\,\mathrm{d}\,\theta\ (n\geq 1)$；

(2) $|a_n|r^n\leq 2A(r)-2\mathrm{Re}f(0)\ (n\geq 1)$。

证明. (1) $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{in\theta}\,\mathrm{d}\,\theta$。

而 $0=\int_{|z|=r}f(z)\cdot z^{n-1}\,\mathrm{d}\,z=\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})r^ne^{in\theta}i\,\mathrm{d}\,\theta\Rightarrow\int_0^{2\pi}\overline{f(re^{i\theta})}e^{in\theta}\,\mathrm{d}\,\theta=0$。

□