Lec12 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 13 日

例 2.1. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=f(z)$，收敛半径 $R=1$。

解.

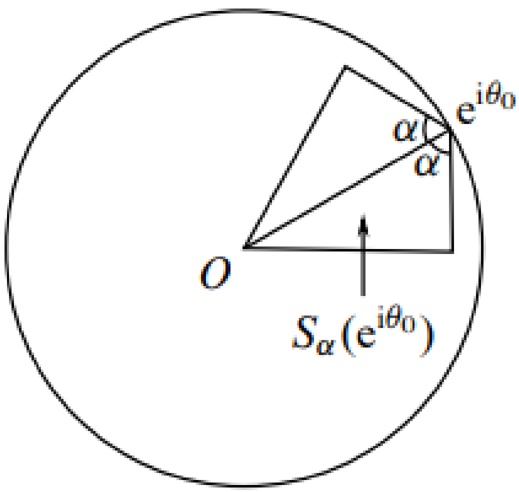
$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z}\Rightarrow f(z)=-\log(1-z)\ (|z|<1).$$

而当 $|z|=1$ 且 $z\neq 1$ 时，$z=e^{i\theta}\ (0<\theta<2\pi)$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\theta}}{n}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}.$$

□

定义 2.1. 设 g 是定义在单位圆盘中的函数，$e^{i\theta_0}$ 是单位圆周上一点，设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，四边形 $S_\alpha(e^{i\theta_0})$ 如图所示[1]。



如果对任意 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，当 z 在 $S_\alpha(e^{i\theta_0})$ 中趋于 $e^{i\theta_0}$ 时，$g(z)$ 有相同的极限 l，则称 g 在 $e^{i\theta_0}$ 处有**非切向极限** l。

[1]旁边那两个角是直角。

定理 2.4. *Abel* 第二定理：设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的 $R=1$ 且级数在 $z=1$ 处收敛于 s，则 $f(z)$ 在 $z=1$ 处有非切向极限 s。

证明. 只需证，对 $\forall\,\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $\overline{S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)}$ $(\delta=\cos\alpha)$ 一致收敛。

记 $\sigma_{n,p}=a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}$。对 $\forall\,\varepsilon>0$，由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\exists\,N$，当 $n>N$ 时，$|\sigma_{n,p}|<\varepsilon,\ \forall\,p>0$，于是

$$
\begin{aligned}
&a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}\\
=&\sigma_{n,1}z^{n+1}+(\sigma_{n,2}-\sigma_{n,1})z^{n+2}+\cdots+(\sigma_{n,p}-\sigma_{n,p-1})z^{n+p}\\
=&\sigma_{n,1}z^{n+1}(1-z)+\sigma_{n,2}z^{n+2}(1-z)+\cdots+\sigma_{n,p-1}z^{n+p-1}(1-z)+\sigma_{n,p}z^{n+p}\\
=&z^{n+1}(1-z)(\sigma_{n,1}+\sigma_{n,2}z+\cdots+\sigma_{n,p-1}z^{p-2})+\sigma_{n,p}z^{n+p}.
\end{aligned}
$$

所以当 $|z|<1,\ n>N$ 时对 $\forall\,p$，有

$$|a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}|\le|1-z|\varepsilon(1+|z|+\cdots+|z|^{p-2})+\varepsilon<\varepsilon\left(\frac{|1-z|}{1-|z|}+1\right).$$

取 $z\in S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$，记 $r=|z|,\ \rho=|1-z|\ (0\le\theta\le\alpha)$，则 $r^2=1+\rho^2-2\rho\cos\theta\ (\rho<\delta=\cos\alpha)$，

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}=\frac{\rho}{1-r}=\frac{\rho(1+r)}{1-r^2}\le\frac{2\rho}{2\rho\cos\theta-\rho^2}\le\frac{2}{2\cos\alpha-\rho}<\frac{2}{\cos\alpha}.$$

当 $z=1$ 时，$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$，

$$|a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}|\le M\varepsilon,\ \forall\,z\in\overline{S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)}.$$

由 Cauchy 准则，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $\overline{S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)}$ 中一致收敛。 □

于是我们重新回顾例 2.1 的计算，我们进一步可以给出边界处的值：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{i\theta})^n}{n}&\overset{Thm2.4}{=}\lim_{z\to e^{i\theta}}-\log(1-z)=-\log(1-e^{i\theta})\\
&=-(\log|1-e^{i\theta}|+i\arg(1-e^{i\theta}))=-\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)+i\frac{\pi-\theta}{2}.
\end{aligned}
$$

进一步我们还能知道

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}=-\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}\ (0<\theta<2\pi).$$

例 2.2. P149.7：设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是 $B(0,1)$ 上的有界全纯函数，证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<+\infty$。

证明. 设 $|f(z)|\le M,\ \forall\,z\in B(0,r)$，对 $\forall\,0<r<1$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\overline{a}_n\overline{z}^n$ 在 $|z|=r$ 上

一致收敛。于是

$$
\begin{aligned}
M^2\cdot 2\pi r &\geq \int_{|z|=r}|f(z)|^2|\,\mathrm{d}\,z| = \int_{|z|=r} f(z)\overline{f(z)}|\,\mathrm{d}\,z| = \int_{|z|=r}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\overline{f(z)}|\,\mathrm{d}\,z| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z|=r} a_n z^n\cdot\overline{f(z)}|\,\mathrm{d}\,z| = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z|=r}\sum_{m=0}^{\infty}\overline{a}_m\overline{z}^m\cdot a_n z^n|\,\mathrm{d}\,z| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{|z|=r} a_n z^n\cdot\overline{a}_m\overline{z}^m|\,\mathrm{d}\,z| = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z|=r}|a_n|^2|z|^{2n}|\,\mathrm{d}\,z| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\cdot r^{2n}2\pi r
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(|a_n|^2 r^{2n}) \leq M \Rightarrow \forall\, k,\ \sum_{n=0}^{k}|a_n|^2\cdot r^{2n}\leq M
$$

$$
\Rightarrow \forall\, k,\ \sum_{n=0}^{k}|a_n|^2\leq M \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\leq M.
$$

□

3 全纯函数的 Taylor 展开

定理 3.1. 设 $f\in H(B(z_0,R))$，则 f 可以在 $B(z_0,R)$ 中 *(以 z_0 为中心)* 展开为幂级数：

$$
f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\ (|z-z_0|<R).
$$

称为 f 的 ***Taylor*** 级数。

证明. 固定 $z\in B(z_0,R)$，取 $0<\rho<R$，且 $|z-z_0|<\rho$。记 $\gamma_\rho\colon |z-z_0|=\rho$，由 Cauchy 积分公式，

$$
f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\,z.
$$

而

$$
\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.
$$

记 $M=\sup\{|f(\zeta)|\mid \zeta\in\gamma_\rho\}<+\infty$，当 $\zeta\in\gamma_\rho$ 时，

$$
\left|f(\zeta)\cdot\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right|\leq M\frac{1}{\rho}\left(\frac{|z-z_0|}{\rho}\right)^n \text{ 且 } \frac{|z-z_0|}{\rho}<1.
$$

由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ 关于 $\zeta\in\gamma_\rho$ 一致收敛，故

$$
f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.
$$

□

定理 3.2. f 在区域 D 上全纯 $\Leftrightarrow$ f 在区域 D 中每点 z_0 的某个邻域中可以展开为幂级数。

满足后者的称为**解析函数**，故全纯函数等价于解析函数。