Lec11 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 11 日

设 $z_n \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, \cdots$，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在有限，其中 $s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$。

- $\sum z_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim z_n = 0$。
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

定义 1.2. 设 $f_n\colon K \to \mathbb{C}$，称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 K 上一致收敛于 $f\colon K \to \mathbb{C}$，如果 $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ 在 K 上一致收敛于 $f(z)$。

一致收敛有如下性质：

Cauchy 准则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 K 上一致收敛 $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N$，当 $n > N$ 时 $|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon,\ \forall\, z \in K$。

Weierstrass 判别法 设 $|f_n(z)| \le a_n,\ \forall\, z \in k,\ \forall\, n$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 K 上一致收敛。

连续性 设 $f_n\colon K \to \mathbb{C}$ 连续且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 K 上一致收敛于 $f(z)$，则 $f(z)$ 连续。

可积性 设 $f_n\colon K \to \mathbb{C}$ 连续且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在可求长曲线 γ 上一致收敛于 $f(z)$,则 $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}\,z$。

可导性 (即 Weierstrass) 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为区域，$f_n\colon D \to \mathbb{C}$ 全纯且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中紧一致收敛于 $f(z)$，则

(1) $f(z)$ 在 D 中全纯；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中紧一致收敛于 $f^{(k)}(t)$。

例 1.1. 定义函数：

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z},\ z = x + iy.$$

则 $|n^z| = |e^{z\log n}| = |e^{x\log n} e^{iy\log n}| = n^x$。由 W-判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ 在 $D = \{z \mid \mathrm{Re} z > 1\}$ 中紧一致收敛，故 $\zeta(z)$ 在 D 中全纯。

例 1.2. 求收敛点集：

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^2}$；

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$。

解. (i) $z = x + iy$，若 $y = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 收敛。

若 $y > 0$，

$$\begin{aligned}\frac{\cos nz}{n^2} &= \frac{1}{2n^2}(e^{in(x+iy)} + e^{-in(x+iy)}) \\ &= \frac{e^{inx} \cdot e^{-ny}}{2n^2} + \frac{e^{-inx} \cdot e^{ny}}{2n^2}.\end{aligned}$$

从而 $\sum \frac{\cos nz}{n^2}$ 发散。同理 $y < 0$ 时也发散。

(ii) 当 $|z| \geq 1$ 时，$|\frac{z^n}{1-z^n}| \geq \frac{|z|^n}{1+|z|^n} \geq \frac{1}{2}$。

当 $|z| < 1$ 时，$|\frac{z^n}{1-z^n}| \leq \frac{|z|^n}{1-|z|^n} \leq \frac{|z|^n}{1-\frac{1}{2}} = 2|z|^n$。($n$ 足够大时)

而 $\sum_{n=0}^{\infty} 2|z|^n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ 收敛。

□

例 1.3. 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为区域，$F(z,s)\colon D \times [0,1] \to \mathbb{C}$ 满足：

(1) 对 $\forall\, s \in [0,1]$, $F(z,s)$ 关于 z 全纯；

(2) F 连续。

则 $f(z) = \int_0^1 F(z,s)\,\mathrm{d}\,s$ 为 D 上的全纯函数。

证明. $\forall\, z_0 \in D$，取 $\varepsilon_0 > 0\ s.t.\ \overline{B(z_0,\varepsilon_0)} \subset D$。下证 f 在 $\Omega = B(z_0,\varepsilon_0)$ 中全纯。记 $f_n(z) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} F(z,\frac{k}{n}) \to f(z)\ (n \to \infty)$。由于 F 在 $\overline{\Omega} \times [0,1]$ 中一致连续，对 $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$，当 $|s_1 - s_2| < \delta$ 时，$F(z,s_1) - F(z,s_2)| < \varepsilon,\ \forall\, z \in \overline{\Omega}$。那么当 $n > \frac{1}{\delta}$ 时，$\forall\, z \in \Omega$，

$$\begin{aligned}|f_n(z) - f(z)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(F\left(z,\frac{k}{n}\right) - F(z,s)\right)\mathrm{d}\,s\right| \\ &< \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \cdot \frac{1}{n} = \varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $f_n(z)$ 在 Ω 上一致收敛到 $f(z)$，从而 $f(z)$ 在 Ω 中全纯。 □

2 幂级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 称为**幂级数**，这里 $a_n \in \mathbb{C},\ z_0 \in \mathbb{C}$。

定理 2.1. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 为幂级数，记 $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\ (0 \leq R \leq +\infty)$，则

(1) 当 $|z| < R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 绝对收敛；

(2) 当 $|z| > R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 发散。

证明. (1) 不妨设 $0 < R < +\infty$。设 $|z| < R$，取 ρ, $|z| < \rho < R$，由于

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho}.$$

进而 $\exists\, N$，当 $n > N$ 时，$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$，所以 $|a_n z^n| \le \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{|z|}{\rho})^n < +\infty$。

(2) 设 $|z| > R$，取 r $s.t.$ $|z| > r > R$，则

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} > \frac{1}{r}.$$

进而 $\exists\, \{n_k\}$ $s.t.$ $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{r}$，那么 $|a_{n_k} z^{n_k}| \ge (\frac{|z|}{r})^{n_k} > 1$，从而 $\lim a_n z^n \ne 0$，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 发散。

$\square$

定理 2.2. *Abel*：若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z_0 \ne 0$ 处收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n z^n|$ 在 $D = \{z \mid |z| < |z_0|\}$ 中紧一致收敛。

证明. 设 K 是 $\{z \mid |z| < |z_0|\}$ 的一个紧子集，取 $r < |z_0|$ $s.t.$ $K \subset B(0,r)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z_0^n$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0 \Rightarrow \exists\, M > 0$ $s.t.$ $|a_n z_0^n| \le M, \forall\, n \ge 0$。

当 $z \in K$ 时，$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| (\frac{|z|}{|z_0|})^n \le M(\frac{r}{|z_0|})^n$，于是由 W-判别法，$\sum |a_n z^n|$ 在 D 中紧一致收敛。 $\square$

定理 2.3. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $B(0,R)$ 中全纯。

证明. 由定理 2.1，当 $|z_0| < R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ 收敛，再由定理 2.2，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $D = \{z \mid |z| < |z_0|\}$ 中紧一致收敛，由 W-定理，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 D 中全纯 $\Rightarrow$ 在 $B(0,R)$ 中全纯。 $\square$

评论. 设 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < R$，则

(1) $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, $|z| < R$;

(2) $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_\gamma \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \mathrm{d}\,z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_\gamma a_n z^n \,\mathrm{d}\,z$。