# Lec10 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 6 日

**例 6.1.** P126.3：设 $D$ 是由有限条光滑简单闭曲线围成的域，$\mathbf{n}$ 是 $\partial D$ 的单位法向量场，指向 $D$ 的外部，$u,v\in C^2(\overline{D})$。证明：

$$\iint_D u\Delta v\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y+\iint_D(u_xv_x+u_yv_y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int_{\partial D}u\frac{\partial v}{\partial\overrightarrow{n}}|\,\mathrm{d}\,z|.$$

**证明.** 设 $\partial D$: $z(t)=x(t)+iy(t)$ $(a\le t\le b)$，$\vec{\tau}$ 为单位切向量，则

$$\begin{aligned}\vec{\tau}(t)&=\frac{x'(t)+iy'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\\ \Rightarrow\vec{n}(t)&=\vec{\tau}(t)\cdot(-i)=\frac{y'(t)-ix'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}.\end{aligned}$$

而 $|\mathrm{d}z|=|z'(t)|\mathrm{d}t=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t$，所以

$$\begin{aligned}&\int_{\partial D}u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}|\,\mathrm{d}\,z|=\int_{\partial D}u\cdot\mathrm{grad}v\cdot\vec{n}|\,\mathrm{d}\,z|\\ =&\int_a^b u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot y'(t)-\frac{\partial v}{\partial y}x'(t)\right)\mathrm{d}\,t=\int_{\partial D}u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}\,y-\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}\,x\right)\\ \overset{Green}{=}&\iint_D(u_xv_x+u\cdot v_{xx}+u_yv_y+u\cdot v_{yy})\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.\end{aligned}$$

□

**例 6.2.** P119.4：$f$ 为整函数，且 $f(\mathbb{C})\subset\{z\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Im}z>0\}$，证明：$f$ 为常数。

**证明.** $\forall\,z\in\mathbb{C}$, $|f(z)+i|>1\Rightarrow\left|\frac{1}{f(z)+i}\right|<1\Rightarrow\frac{1}{f(z)+i}=\mathrm{Const.}\Rightarrow f(z)=\mathrm{Const.}.$ □

我们稍作推广：

$f$ 为整函数且 $f(\mathbb{C})$ 的补集含有内点，则 $f$ 为常数。($f(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}$ 中非稠密。)

**例 6.3.** P119.5：$f$ 为整函数且 $f(\mathbb{C})\subset\mathbb{C}\setminus[0,1]$。证明 $f$ 为常数。

**证明.** $\frac{1}{f(z)}-1\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ 全纯。
$\sqrt{z}\colon\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)\to\mathrm{Im}z>0$ 全纯。
$\sqrt{\frac{1}{f(z)}-1}\colon\mathbb{C}\to\mathrm{Im}z>0$ 全纯 $\Rightarrow\sqrt{\frac{1}{f(z)}-1}$ 为常数，从而 $f(z)$ 为常数。 □

# Part IV

# 全纯函数的 Taylor 展开及应用

## 1 函数列与函数项级数

**定义 1.1.** 设 $K \subset \mathbb{C}$，称 $f_n\colon K \to \mathbb{C}\ (n = 1, 2, \cdots)$ 在 $K$ 上**一致收敛**于 $f\colon K \to \mathbb{C}$，如果对 $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N$，当 $n > N$ 时，$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,\ \forall\, z \in K$。

**定理 1.1.** *Weierstrass*：设 $D \subset \mathbb{C}$ 为区域，$f_n\colon D \to \mathbb{C}$ 全纯。若 $f_n$ 在 $D$ 的每个紧致子集中一致收敛于 $f\colon D \to \mathbb{C}$($f$ 在 $D$ 中紧一致收敛)，则

*(1)* $f$ 在 $D$ 中全纯。

*(2)* 对 $\forall\, k \geq 1$，$f_n^{(k)}(z)$ 在 $D$ 中紧一致收敛于 $f^{(k)}(z)$。

**证明.** (1) 对 $\forall\, z_0 \in D$ 和 $r > 0\ s.t.\ \overline{B(z_0, r)} \subset D$，设 $\gamma$ 为 $B(z_0, r)$ 中的一条可求长简单闭曲线，$\gamma$ 为紧致集，故在 $\gamma$ 上 $f_n \rightrightarrows f$。对 $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N$，当 $n > N$ 时，

$$\begin{aligned}
&|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,\ \forall\, z \in \gamma \\
\Rightarrow &\left|\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)||\,\mathrm{d}\,z| < \varepsilon|\gamma|.
\end{aligned}$$

从而 $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$，由 Morera 定理，$f(z)$ 在 $B(z_0, r)$ 中全纯，再由 $z_0$ 的任意性知 $f$ 在 $D$ 中全纯。

(2) 只需对 $k = 1$ 证明即可。

固定 $z_0 \in D$，取 $\delta > 0\ s.t.\ \overline{B(z_0, 2\delta)} \subset D$。设 $z \in B(z_0, \delta),\ \zeta \in \partial B(z_0, 2\delta)$，则 $|\zeta - z| \geq \delta$。于是

$$\begin{aligned}
|f_n'(z) - f'(z)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = 2\delta} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\,\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta - z_0| = 2\delta} \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{\delta^2}|\,\mathrm{d}\,\zeta| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sup_{|\zeta - z_0| = 2\delta}|f_n(\zeta) - f(\zeta)| \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot 2\pi \cdot 2\delta \to 0\ (n \to +\infty).
\end{aligned}$$

所以 $f_n(z)$ 在 $B(z_0, \delta)$ 中一致收敛于 $f'(z)$。

设 $K \subset D$ 为紧致子集，对 $\forall\, z \in K,\ \exists\, \delta_z > 0\ s.t.\ f_n$ 在 $B(z, \delta_z)$ 中一致收敛。$\{B(z, \delta_z) \mid z \in K\}$ 为 $K$ 的开覆盖，故有有限子覆盖 $\{B(z_i, \delta_{z_i}) \mid i = 1, \cdots, n\}$，则 $f_n$ 在 $\bigcup\limits_{i=1}^n B(z_i, \delta_{z_i}) \supset K$ 上一致收敛。

□

**评论.** 这个定理对实函数不成立，因为一列实解析函数可以一致收敛到非 $C^1$ 的连续函数 (Weierstrass 逼近定理)。