Lec1 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 7 日

Part I

复数与复变函数

$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$。

$z = a + ib,\ a := \mathrm{Re}z,\ b = \mathrm{Im}z,\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ \overline{z} := a - ib,\ z\overline{z} = |z|^2$。

定理 1.1. *(1)* $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ \mathrm{Im} = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$。

(2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w},\ \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$。

(3) $|zw| = |z| \cdot |w|,\ |\overline{z}| = |z|$。

(4) $|z + w| \leq |z| + |w|$，等号成立 $\Leftrightarrow\ \exists\, t \geq 0\ s.t.\ z = tw$ 或 $w = tz$。

证明. 对 (4)，

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|zw| = (|z| + |w|)^2.\end{aligned}$$

等号成立 $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z\overline{w}) = |z\overline{w}| \Leftrightarrow \exists\, t \geq 0\ s.t.\ z\overline{w} = t'$。

不妨设 $w \neq 0$，则 $z \cdot \overline{w} \cdot w = t'w \Rightarrow z = \frac{t'}{|w|^2}w$。 □

例 1.1. 设 $|a| < 1$，$|z| < 1$，证明 $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1$。

证明. $|z - a|^2 = (z - a)(\overline{z} - \overline{a}) = |z|^2 + |a|^2 - (a\overline{z} + \overline{a}z)$。

$|1 - \overline{a}z|^2 = (1 - \overline{a}z)(1 - a\overline{z}) = 1 + |a|^2 \cdot |z|^2 - (a\overline{z} + \overline{a}z)$。

于是 $|z - a|^2 - |1 - \overline{a}z|^2 = (|z|^2 - 1)(1 - |a|^2) < 0$。 □

复数的几何表示

$$\begin{array}{ccccc}\text{复数} & \longleftrightarrow & \text{平面中的点} & \longleftrightarrow & \text{平面向量} \\ a + ib & & (a, b) & & \overrightarrow{OP}\end{array}$$

复数的加法对应向量的加法。

设 $z=a+ib\neq 0$, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=r$，$\exists\,\theta\ s.t.\ z=r(\frac{a}{r}+i\frac{b}{r})=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\theta$ 称之为 z 的一个**辐角**。

$\mathrm{Arg}(z)=\{\theta+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ 为 z 的所有的辐角，$\arg z\in(-\pi,\pi]$ 称为辐角的主值[1]。$\arg z$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 中非连续。

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$,

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)]\\&=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)).\end{aligned}$$

用复数 w 去乘复数 z，相当于将 z 逆时针旋转 $\arg w$，再把 z 的模长伸长 $|w|$ 倍。

由 $\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\overline{w}}{|w|^2}$，$\arg\frac{z}{w}$ 为 z,w 的夹角。

例 1.2. z_1,z_2 平行 $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z_1\cdot\overline{z_2})=0$。

证明.

$$\begin{aligned}z_1,z_2\text{平行}&\Leftrightarrow\arg\frac{z_1}{z_2}=0\text{或}\pi\\&\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}=t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z_1\overline{z_2}=t|z_2|^2\\&\Leftrightarrow\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2})=0.\end{aligned}$$

□

例 1.3. (1) $\triangle z_1z_2z_3$ 与 $\triangle w_1w_2w_3$ 相似 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}z_1&w_1&1\\z_2&w_2&1\\z_3&w_3&1\end{vmatrix}=0$。

(2) z_1,z_2,z_3 共线 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}z_1&\overline{z_1}&1\\z_2&\overline{z_2}&1\\z_3&\overline{z_3}&1\end{vmatrix}=0$。

扩充复平面

$\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，$\infty$ 称为无穷远点。

$z\pm\infty$, $z\cdot\infty=\infty\ (z\neq 0)$, $\frac{z}{\infty}=0$, $\frac{z}{0}=\infty\ (z\neq 0)$。($0\cdot\infty$, $\infty\pm\infty$ 无定义。)

设 S^2 为单位球面，$\mathbb{C}\to S^2\setminus\{N\}$ 一一对应，$\mathbb{C}_\infty\to S^2$ 一一对应。

复平面的拓扑

度量可以诱导拓扑，$\mathbb{C}$ 中的度量 $d(z,w)=|z-w|$。$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0:\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-z_0|=0$。

[1]也可以定义 $\arg z\in[0,2\pi)$。

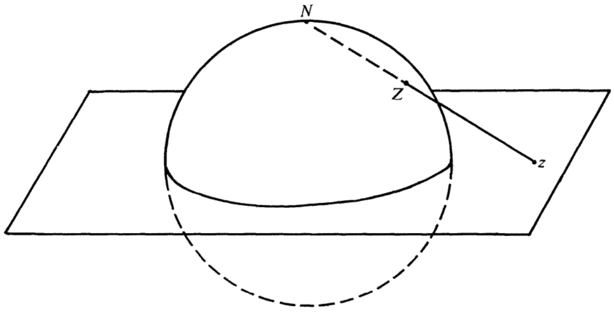

图 1: 球极投影

定义 1.1. $U \subset \mathbb{C}$ 称为**开集**，如果对 $\forall\, z \in U$, $\exists\, \varepsilon > 0\; s.t.$

$$B(z,\varepsilon) := \{w \mid |w-z| < \varepsilon\} \subset U.$$

如果 W^C 为开集，则称 W 为**闭集**。

z_0 称为 $E \subset \mathbb{C}$ 的**聚点**，如果对 $\forall\, \varepsilon > 0$, $B(z_0,\varepsilon) \cap (E \setminus \{z_0\}) \neq \varnothing$。

$E \cup \{E\text{的聚点}\} = \overline{E}$ 称为 E 的**闭包**。易见 $\overline{E} = \bigcap_{F \supset E,\, F\text{为闭集}} F$；$E$ 为闭集 $\Leftrightarrow E = \overline{E}$。

$(\mathbb{C}, d)$ 的完备性：

(1) $\mathbb{C}$ 中的 Cauchy 列收敛。

(2) 有界点列有收敛子列。

(3) 有界无穷点集必有聚点。

(4) 闭集套定理。

(5) 有界闭集的任意开覆盖有有限子覆盖。

定义 1.2. $E \subset \mathbb{C}$ 称为**紧致集**，如果 E 的任何开覆盖有有限子覆盖。$E \subset \mathbb{C} \Leftrightarrow E$ 为有界闭集[2]。

定理 1.2. 设 $E \subset \mathbb{C}$ 为紧集，$F \subset \mathbb{C}$ 为闭集，$E \cap F = \varnothing$，则

$$d(E,F) = \inf\{d(z,w) \mid z \in E, w \in F\} > 0.$$

证明. $\forall\, a \in E$, $\varepsilon_a = \frac{1}{2}(a,F) > 0$，则 $\{B(a,\varepsilon_a) \mid a \in E\}$ 为 E 的开覆盖 $\Rightarrow$ 有有限子覆盖 $B(a_i,\varepsilon_{a_i})$, $1 \le i \le n$。

取 $\delta = \min\{\varepsilon_{a_i} \mid 1 \le i \le n\}$，可以证明 $d(E,F) \geq \delta > 0$。 $\square$

[2]一般度量空间不成立。