第一章　复数与复变函数

§1.1 习题

2．设 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 是任意 n 个复数，证明：$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|$，并给出不等式中等号成立的条件.

（提示：可以用数学归纳法证明. 等号成立的条件是 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 线性相关）.

3．证明：$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|) \le |z| \le |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$.

证明:设 $z = a + ib$，则 $\mathrm{Re}\, z = a$，$\mathrm{Im}\, z = b$，$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.由题 2 知，$|z| \le |a| + |bi| = |a| + |b|$

$$故\left(\frac{|a| + |b|}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{|a|^2 + 2|ab| + |b|^2}{2} = \frac{|a|^2 + |b|^2}{2} + |ab| \le \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 + b^2}{2} = |z|^2,$$

即有 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|) \le |z| \le |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$.

4．若 $|z_1| = l\,|z_2|, l > 0$，证明：$|z_1 - l^2 z_2| = l\,|z_1 - z_2|$.

证明：不妨设 $|z_2||z_1| \ne 0. l^2|z_2|^2 = |z_1|^2$

则 $|z_2||z_1 - l^2 z_2| = \left|z_1\overline{z_2} - l^2|z_2|^2\right| = \left|z_1\overline{z_2} - |z_1|^2\right| = |z_1||z_1 - z_2|$

即有 $|z_1 - l^2 z_2| = l\,|z_1 - z_2|$ 成立.

5．设 $|a| < 1$，证明：若 $|z| = 1$，则 $\left|\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right| = 1$.

证明：由 $|z| = 1$ 得 $z\overline{z} = 1$

故 $|z - a| = |z - az\overline{z}| = |z||1 - a\overline{z}| = |1 - a\overline{z}|$

即证之.

6．设 $|a| < 1$，$|z| < 1$. 证明：$\left|\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right| < 1$.

证明：提示：（$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|<1 \Leftrightarrow |z|^2-2\mathrm{Re}\,\overline{a}z+|a|^2<1-2\mathrm{Re}\,\overline{a}z+|a|^2|z|^2$;

而$1-|a|^2-|z|^2+|a|^2|z|^2=(1-|a|^2)(1-|z|^2)>0$;）

7．设 $z_1,z_2,\ldots,z_n$， $w_1,w_2,\ldots,w_n$ 是任意 2n 个复数，证明复数形式的 Lagrange 等式：$\left|\sum_{j=1}^{n}z_jw_j\right|^2=(\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^2)(\sum_{j=1}^{n}\left|w_j\right|^2)-\sum_{1\le j<k\le n}\left|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}\right|^2$，并由此推出 Cauchy 不等式：$\left|\sum_{j=1}^{n}z_jw_j\right|^2=\left(\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left|w_j\right|^2\right)$.

证明：提示（记 $A=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \cdots & \overline{w_n}\end{pmatrix}$，$\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \cdots & \overline{w_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} & w_1 \\ \overline{z_2} & w_2 \\ \cdots & \cdots \\ \overline{z_n} & w_n\end{pmatrix}=\det(A\overline{A'})\ge 0$，

$$\det\begin{pmatrix} z_j & z_k \\ \overline{w_j} & \overline{w_k}\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \overline{z_j} & w_j \\ \overline{z_k} & w_k\end{pmatrix}=|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}|^2\text{，则原式}=\sum_{1\le j<k\le n}\left|z_j\overline{w_k}-z_k\overline{w_j}\right|^2\ge 0.(1)$$

另外，$\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \overline{w_1} & \overline{w_2} & \cdots & \overline{w_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} & w_1 \\ \overline{z_2} & w_2 \\ \cdots & \cdots \\ \overline{z_n} & w_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^2 & \sum_{j=1}^{n}z_jw_j \\ \sum_{j=1}^{n}\overline{z_j}\overline{w_j} & \sum_{j=1}^{n}\left|w_j\right|^2\end{pmatrix}$

$=(\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^2)(\sum_{j=1}^{n}\left|w_j\right|^2)-\left|\sum_{j=1}^{n}z_jw_j\right|^2\ge 0$.（2）

由（1）=（2）可得证.

§1.2 习题

1． 把复数 $z=1+\cos q+i\sin q$ 写成三角形式.

解： $z=1+e^{iq}=e^{\frac{1}{2}iq}(e^{-\frac{1}{2}iq}+e^{\frac{1}{2}iq})=e^{\frac{1}{2}iq}2\mathrm{Re}\,e^{\frac{1}{2}iq}=(2\cos\frac{q}{2})e^{\frac{1}{2}iq}$.

2． 问取何值时有 $(1+i)^n=(1-i)^n$.

解：提示（$\frac{1+i}{1-i}=i, i^{4k}=1, k\in N$）

3．证明：$\sum_{k=0}^{n}\cos kq=\dfrac{\sin\frac{q}{2}+\sin(n+\frac{1}{2})q}{2\sin\frac{q}{2}}$，$\sum_{k=0}^{n}\sin kq=\dfrac{\cos\frac{q}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})q}{2\sin\frac{q}{2}}$，

证 明 ： 由 于 $\sum_{k=0}^{n}e^{ikq}=\dfrac{1-e^{i(n+1)q}}{1-e^{iq}}=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}q}{\sin\frac{q}{2}}e^{\frac{inq}{2}}$ ， 则 即 可 得 $\sum_{k=0}^{n}\cos kq=\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n}e^{ikq}$ ，

$\sum_{k=0}^{n}\sin kq=im\sum_{k=0}^{n}e^{ikq}$.

4．证明：$\Delta z_1z_2z_3$和$\Delta w_1w_2w_3$同向相似的充分必要条件为$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1\\ z_2 & w_2 & 1\\ z_3 & w_3 & 1\end{vmatrix}$=0.

证明：提示（$\Delta z_1z_2z_3$和$\Delta z_1z_2z_3$同向相似$\Leftrightarrow\exists a,b\in C$，使得$w_k=az_k+b(k=1,2,3)$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$线性相关$\Leftrightarrow\det\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1\\ z_2 & w_2 & 1\\ z_3 & w_3 & 1\end{vmatrix}=0.$）

5．设$z_1\neq z_2$，证明：z 位于以z_1和z_2为端点的开线段上，当且仅当存在$l\in(0,1)$，使得

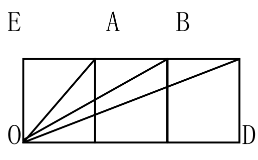
$$z=l\,z_1+(1-l)z_2;$$

证明：z 位于以z_1和 z_2为端点的开线段上

$\Leftrightarrow\exists k>0,z_2-z=k(z-z_1)\Leftrightarrow\exists k>0,z=\dfrac{z_2}{1+k}+\dfrac{z_1}{1+k}$

$\Leftrightarrow\exists l\in(0,1),z=l\,z_1+(1+l)z_2,(l=\dfrac{k}{1+k})$.

6．图 1.5 是三个边长为 1 的正方形，证明：$\angle AOD+\angle BOD+\angle COD=\dfrac{p}{2}$.



解：以 O 为原点，OD 为 X 轴，OE 为 Y 轴，建立坐标系. 设$\vec{OA}=z_1,\vec{OB}=z_2,\vec{OC}=z_3$

则$z_1=1+i,z_2=2+i,z_3=3+i$，

从而$\arg(z_1z_2z_3)=\arg(1+i)(2+i)(3+i)=\arg(10i)$.

因为 i 是单位向量，它的辐角为$\frac{p}{2}$，即$\angle AOD+\angle BOD+\angle COD=\frac{p}{2}$.

10．证明：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$, 并说明等式的几何意义.

证明：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+2\operatorname{Re} z_1z_2+|z_2|^2+|z_1|^2-2\operatorname{Re} z_1z_2+|z_2|^2$

$=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

几何意义是：平行四边形两对角线长的平方和等于它的各边长的平方和.

11．设$z_1,\ldots,z_n$是单位圆周（以原点为中心、半径为 1 的圆周）上的 n 个点，如果$z_1,\ldots,z_n$是正 n 边形的 n 个顶点，证明：$\sum_{k=1}^{n} z_k=0$.

证明：记$w=z_1+z_2+\ldots+z_n\in C$，设该正 n 边形的一个圆心角为$q$，$0<q<p$.由复数乘法几何意义及正 n 边形对称性，$we^{iq}=w\Rightarrow w=0$，即证之.

3. 设z_1，z_2，z_3，z_4是单位圆周上的四个点，证明：这四个点是一矩形顶点的充要条件为$z_1+z_2+z_3+z_4=0$.

证明：提示（先为菱形，连线为直径对点则是矩形）

14. 设 L 是由方程$az\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+d=0$所确定的点的轨迹，其中$a$，d 是实数，$b$ 是复数.

证明：（i）当a=0，$b\neq 0$时，L 是一直线；（ii）当$a\neq 0$，$b^2-ad>0$时，L 是一圆周.并求出该圆周的圆心和半径.

证明：（i）令 $l=d/2|b|^2$，则$d=2lb\bar{b}$，故原方程为$\bar{b}(z+lb)+b\overline{(z+lb)}=0$，即$\operatorname{Re}\bar{b}(z+lb)=0$，即$z+lb$ 与 b 垂直，从而轨迹是一条通过点$-lb$，与b 垂直的直线.

（ii）记$l^2=|b|^2-ad>0$，则$ad=b\bar{b}-l^2$，

原式$\Leftrightarrow a^2z\bar{z}+a\bar{b}z+ab\bar{z}+ad=0\Leftrightarrow(az+b)(a\bar{z}+\bar{b})=l^2\Leftrightarrow|az+b|^2=l^2$

即证之.

§1.3 习题

1. 证明：在复数的球面表示下，z 和$\frac{1}{\bar{z}}$的球面像关于复平面对称.

证明：设 $z=x+iy$ 其球面对应的坐标为 $x_1=\dfrac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, x_2=\dfrac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}, x_3=\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$.

而 $\dfrac{1}{\bar{z}}$ 球面像对应的坐标为

$$x_1'=\frac{\frac{1}{\bar{z}}+\frac{1}{z}}{1+\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|^2}=\frac{z+\bar{z}}{1+|\bar{z}|^2}=\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}=x_1,$$

$$x_2'=\frac{\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}}{i(1+\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|^2)}=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|\bar{z}|^2)}=\frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}=x_2,$$

$$x_3'=\frac{\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|^2-1}{\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|^2+1}=\frac{1-|\bar{z}|^2}{1+|\bar{z}|^2}=\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}=-x_3,$$

从而有 $x_1'=x_1, x_2'=x_2, x_3'=-x_3$，故 z 和 $\dfrac{1}{\bar{z}}$ 的球面像关于复平面对称.

2. 证明：在复数的球面表示下，z 和 w 的球面像是直径对点当且仅当 z$\bar{w}$=−1.

证明：$\Leftarrow$ 设 $z=x+iy$，由 $z\bar{w}=-1$ 得 $\bar{w}=-\dfrac{1}{z}, w=-\dfrac{1}{\bar{z}}$，

由于 z 对应的球面像为 $x_1=\dfrac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, x_2=\dfrac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}, x_3=\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$，

w 对应的球面像为 x_1', x_2', x_3'，计算可得：$x_1'=-x_1, x_2'=-x_2, x_3'=-x_3$，

故 z 和 w 的球面像是直径对点.

$\Rightarrow$ 由球面表示的几何意义知，$z,\bar{w}$ 位于通过竖坐标轴的平面与 xoy 平面交点上，从而 $z,\bar{w}$ 必与原点共线，则 $z\bar{w}=-l,\ l>0$，由 $x_3=x_3'$，易知 $l=1$.

3. 证明：在复数的球面表示下，C_∞ 中的点 z 和 w 的球面像间的距离为

$$\frac{2|z-w|}{\sqrt{\left(|z|^2+1\right)\left(|w|^2+1\right)}}.$$

证明：设 z 和 w 的球面像的坐标为 (x_1,x_2,x_3) 和 (x_1',x_2',x_3')，

则 $(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2=2-2(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3')$,

$$x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'=\frac{(z+\bar{z})(w+\bar{w})-(z-\bar{z})(w+\bar{w})+(|z|^2-1)(|w|^2+1)}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$$

$$=\frac{(1+|z|^2)(1+|w|^2)-2|z-w|^2}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$$

故

$$d(z,w)=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2}$$

$$=\sqrt{2-2(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3')}=\frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}$$

4. 证明：在复数的球面表示下，若 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是二阶酉方阵，则 $\boldsymbol{C}_\infty$ 的变换 w= $\dfrac{az+b}{cz+d}$ 诱导了球面绕球心的一个旋转.

证明：先证

$$\forall z,w\in c, d(z,w)=\frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}},\quad \text{一定有 } d\left(\frac{az+b}{cz+d},\frac{aw+b}{cw+d}\right)=d(z,w).$$

而

$$\frac{\left|\frac{az+b}{cz+d}-\frac{aw+b}{cw+d}\right|^2}{\left(\left|\frac{az+b}{cz+d}\right|^2+1\right)\left(\left|\frac{aw+b}{cw+d}\right|^2+1\right)}=\frac{\left|(z-w)\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|^2}{(|az+b|^2+|cz+d|^2)(|aw+b|^2+|cw+d|^2)},$$

由 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是二阶酉方阵知，

$$\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|=1, |az+b|^2+|cz+d|^2=(\bar{z}\quad 1)\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}=(\bar{z}\quad 1)\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}=|z|^2+1,$$

类似的有 $|aw+b|^2+|cw+d|^2=|w|^2+1$, 故

$$\text{原式}=\frac{|(ad-bc)(z-w)|^2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}=\frac{|z-w|^2}{(|z|^2+1)(|z|^2+1)},$$

故 $d\left(\frac{az+b}{cz+d},\frac{aw+b}{cw+d}\right)=d\left(z,w\right)$ 成立，从而诱导变换是一个等距.

又等距变换的行列式是 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的连续函数且只取 ±1 两个值，而二阶酉方阵全体是连通的，从而行列式为常数.

取 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，此时诱导变换是恒等变换，行列式为 1，故此常数为 1，从而此等距变换为旋转.

§1.4 习题

1\. 设 $z_0\notin(-\infty,0]$， $z_n\neq0$， $\forall n\in N$. 证明：复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 z_0 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=|z_0|$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n=\arg z_0$.

证明：因为 $z_0\notin(-\infty,0],\exists d>0, s.t.\, p-d>\arg z_0>-p+d$，

由不等式 $|z-z_0|\leq||z_n|-|z_0||+|z_0||\arg z_n-\arg z_0|$ 即得充分性

由不等式 $|z-z_0|\geq||z_n|-|z_0||$ 及 $|z-z_0|+||z_n|-|z_0||\geq2|z_0|\left|\sin\frac{\arg z_n-\arg z_0}{2}\right|$

并注意 $-p+\frac{d}{2}<\frac{\arg z_n-\arg z_0}{2}<p-\frac{d}{2}$，可得必要性.

2\. 设 $z=x+iy\in\boldsymbol{C}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x\left(\cos x+i\sin y\right)$.

（提示：分开证明实部与虚部收敛即可.）

§1.5 习题

2\. 设 $E\subset\boldsymbol{C}$ 是非空点集，$z,w\in\boldsymbol{C}$.证明：$\left|d\left(z,E\right)-d\left(w,E\right)\right|\leq|z-w|$ 成立，而 $\left|d\left(z,E\right)-d\left(w,E\right)\right|\leq d\left(z-w,E\right)$ 不成立.

证明：$\forall x\in E,$

有 $d(z,E)=\inf\limits_{x\in E}|z-x|\leq|z-x|\leq|z-w|+|w-z|\Rightarrow|w-x|\geq d(z,E)-|z-w|$，

取下确界得

$d(w,E)=\inf\limits_{x\in E}|w-x|\geq d(z,E)-|z-w|$，即 $d(z,E)-d(w,E)\leq|z-w|$ （1）

同样可得 $d(w,E)-d(z,E)\leq|z-w|$ （2）

因此由（1）（2）可得结论成立.

反例：令 $E=\{1\}, z=2, w=1$.则 $d(z,E)=1$，$d(w,E)=0$，$d(z-w,E)=0$

3. 指出下列点集的内部、边界、闭包和导集：

(i) $\boldsymbol{N}$ ={k: k 为自然数}；

解：内部：空集；边界：$\boldsymbol{N}$；闭包：$\overline{\boldsymbol{N}}$ ={k: k 为自然数}；导集：空集.

(ii) E={$\frac{1}{k}$: k 为自然数}：

解：内部：空集；边界：E$\cup\{0\}$；闭包：$\overline{E}$ = E$\cup\{0\}$；导集：{0}.

(iii) D=B(1,1) $\cup B(-1,1)$；

解：内部：D=B(1,1) $\cup B(-1,1)$；边界：$\partial D=\{z\in \boldsymbol{C}:|z-1|=1$ 或 $|z+1|=1\}$；

闭包：$\overline{D}=\{z\in \boldsymbol{C}:|z-1|\le 1$ 或 $|z+1|\le 1\}$；导集：$D'=\{z\in \boldsymbol{C}:|z-1|\le 1$ 或 $|z+1|\le 1\}$；

(iv) G={z $\in \boldsymbol{C}$: $1<|z|\le 2$ }；

解：内部：$G^o=\{z\in \boldsymbol{C}:1<|z|<2\}$；边界：；$\partial G=\{z\in \boldsymbol{C}:|z|=2$ 或 $|z|=1\}$

闭包：$\overline{G}=\{z\in \boldsymbol{C}:1\le|z|\le 2\}$；导集：$G'=\{z\in \boldsymbol{C}:1\le|z|\le 2\}$；

(v) $\boldsymbol{C}$.

解：内部：$\boldsymbol{C}$；边界：空集；闭包：$\boldsymbol{C}$；导集：$\boldsymbol{C}$.

4.指出下列点集中哪些是开集，哪些是闭集，哪些是紧集：

(i) Z={k: k 为自然数}；

解：闭集，非开集，非紧集；

(ii) E 为有限集；

解：紧集；

(iii) D=$\{z\in \boldsymbol{C}:\operatorname{Im} z>0\}\backslash\left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}_k\right)$，　$\boldsymbol{F}_k=\{z\in \boldsymbol{C}:z=k+iy, 0\le y\le 1\}$；

解：开集；

(iv) G=B(0,1)\ $\left\{\frac{1}{k+1}:k\text{为自然数}\right\}$；

解：非开，非闭，非紧；

(v) $\boldsymbol{C}$ \B$(\infty，R)$；

解：紧集.

8. 设 D 是开集，$F \subset D$是非空紧集，证明：

（i）$d\left(F,\partial D\right)>0$;

(ii) 对任意$0<d<d\left(F,\partial D\right)$,存在$F$中的点$z_1, z_2,\dots, z_n$, 使得$F \subset \bigcup_{k=1}^{n} B\left(z_k, d\right) \subset D$并且

$$d\left(\bigcup_{k=1}^{n} B\left(z_k,d\right),\partial D\right) \geq d\left(F,\partial D\right)-d .$$

证明：（1）由定理 1.5.6 可得

（2）$\forall z \in B(z_k,d)$, 成立 $d(F,\partial D)-d(z,\partial D) \leq d(z_k,\partial D)-d(z,\partial D) \leq |z_k - z| < d$

即 $d(z,\partial D) > d(F,\partial D)-d$ ，即 $d(\bigcup_{k=1}^{n} B(z_k,d),\partial D) = \inf d(z,\partial D) \geq d(F,\partial D)-d$

§1.6 习题

1. 满足下列条件的点 z 所组成的点集是什么？如果是域，说明它是单连通域还是多连通域？

（i）$\operatorname{Re} z = 1$;

实部是 1 的直线， 不是域

（ii）$\operatorname{Im} z < -5$;

虚部小于-5 的开平面， 单连通域

（iii）$\left|z-i\right|+\left|z+i\right|=5$;

椭圆曲线 不是域

（iv）$\left|z-i\right| \leq \left|2-i\right|$;

闭圆盘 单连通域

（v） $\arg\left(z-1\right)=\dfrac{p}{6}$;

半射线 不是域

（vi）$\left|z\right|<1, \operatorname{Im} z > \dfrac{1}{2}$;

开弓形 单连通域

（vii）$\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq 2$;

圆盘外无界闭区域

（viii）$0 < \arg\dfrac{z-i}{z+i} < \dfrac{p}{4}$.

左半平面（不含虚轴）与以（-1，0）为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的闭圆盘外部之交　多连通域

§1.7 习题

3. 证明紧集的连续像为紧集.

证明：任取 $f(E)$ 的开覆盖 $U=\{u\}$，则 $f^{-1}(U)=\{f^{-1}(u)\}$ 是 E 的一个开覆盖，因为 E 为紧集，存在有限个开集 $f^{-1}(u_1), f^{-1}(u_2),..., f^{-1}(u_n)\in f^{-1}(U), s.t. E\subset\cup_{k=1}^{n} f^{-1}(u_k)$，故

$f(E)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}u_k$，从而 $f(E)$ 是紧集..

将紧集换成闭集，结论不一定成立.

反例：取 $E=[1,\infty)$, 令 $f(x)=\dfrac{1}{x}$. 则 $f(E)=(0,1]$ 不闭.

5. 证明：若 f 在域 D 上一致连续，则对任意 $z_0\in\partial D, \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在.

证明：因为 f 在域 D 上一致连续，故 $\forall e>0, \exists d>0$，

对 D 上任意的 z_1, z_2，只要 $|z_1-z_2|<2d$，有 $|f(z_1-z_2)|<e$.

因此 $\forall z_1, z_2\in D\cap B(z_0,d)$，有 $|f(z_1-z_2)|<e$，由 Cauchy 收敛原理，极限存在.

第二章全纯函数

§2.1 习题

1.研究下列函数的可微性：

（i） $f(z)=|z|$;

解：　$z\neq 0$ 时

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{|z|-|z_0|}{z-z_0}$$ 不存在

这是因为当 $z=x_0+iy$ 时，

$$\lim_{y\to y_0}\frac{\sqrt{x_0^{\ 2}+y^2}-\sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}}{x_0+iy-x_0-iy_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{\sqrt{x_0^{\ 2}+y^2}-\sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}}{iy-iy_0}$$

当 $z=x+iy_0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x^2+y_0^{\ 2}}-\sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}}{x+iy_0-x_0-iy_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x^2+y_0^{\ 2}}-\sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}}{x-x_0}=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}}$$

故 $z\neq 0$ 时， $f(z)$ 不可导.

当 $z=0$ 时，有 $\dfrac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\dfrac{|\Delta z|}{\Delta z}=\dfrac{\Delta r}{\Delta r e^{iq}}=e^{-iq}$

即知 $f(z)=|z|$ 在 $z=0$ 也不可导.

从而 $f(z)=|z|$ 处处不可导.

(ii) $f(z)=|z|^2$;

解：$z\neq 0$ 时

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}$$ 显然不存在.

这是因为当 $z=x+iy_0$ 时

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+y_0^{\ 2}-x_0^{\ 2}-y_0^{\ 2}}{x+iy_0-x_0-iy_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=2x_0$$

当 $z=x_0+iy$ 时，

$$\lim_{y\to y_0}\frac{x_0^{\ 2}+y^2-x_0^{\ 2}-y_0^{\ 2}}{x_0+iy-x_0-iy_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{(y-y_0)(y+y_0)}{(y-y_0)i}=\frac{2y_0}{i}$$

$z=0$ 时可导， $f'(0)=0$.

（iii） $f(z)=\operatorname{Re} z;$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\operatorname{Re} z-\operatorname{Re} z_0}{z-z_0}$$ 显然不存在.

这是因为当 $z=x+iy_0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x+iy_0-x_0-iy_0}=1.$$

当 $z=x_0+iy$ 时，

$$\lim_{y\to y_0}\frac{x_0-x_0}{x_0+iy-x_0-iy_0}=0$$

从而 $f(z)=\operatorname{Re} z$ 处处不可导

(v) $f(z)$ 为常数

不妨设 $f(z)=C,$ 显然 $f^{'}(z)=0$

故 $f(z)=C$ 在处处可导.

2.设 f 和 g 都在 z_0 处可微，且 $f(z_0)=g(z_0)=0, g^{'}(z_0)\neq 0$ 证明： $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f^{'}(z_0)}{g^{'}(z_0)}$

提示： $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot\frac{z-z_0}{g(z)-g(z_0)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

4．设域 G 和域 D 关于实轴对称，证明：如果 $f(z)$ 是 D 上的全纯函数，那么 $\overline{f(\overline{z})}$ 是 G 上的全纯函数.

提示： $\lim\limits_{\nabla z\to 0}\frac{\overline{f(\overline{z+\nabla z})}-\overline{f(\overline{z})}}{\nabla z}=\lim\limits_{\nabla z\to 0}\overline{\left[\frac{f(\overline{z}+\overline{\nabla z})-f(\overline{z})}{\overline{\nabla z}}\right]}=\overline{f'(\overline{z})}, z\in G$

§2.2 习题

1.设 D 是域, $f\in H(D)$. 如果对每个 $z\in D$, 都有 $f'(z)=0$,证明 f 是一常数.

证明:因为 $f'(z)=0$,而 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$=0(定理 2.2.4)

所以 $\frac{\partial u}{\partial x}$=0, $\frac{\partial v}{\partial x}$=0,而 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.故 $\frac{\partial u}{\partial y}$=0, $\frac{\partial v}{\partial y}$=0.

因此 f 是一个常数.

3.设 $z=x+iy$,证明 $f(z)=\sqrt{xy}$ 在 z=0 处满足 Cauchy-Reimann方程,但 f 在 z=0 处不可微.

提示: $u=\sqrt{xy}$, $v=0$.直接算偏导.

8.设 D 是域, $f\in H(D)$, f 在 D 中不取零值,

证明: 对于任意 p>0,有 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^p=p^2\,|f(z)|^{p-2}\,|f'(z)|^2$.

提示: $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}$,将 $|f(z)|$ 写成 $\left[f(z)\overline{f(z)}\right]^{\frac{1}{2}}$,

利用 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$=0, $\frac{\partial \bar f}{\partial z}$=0, $\frac{\partial f}{\partial z}=f'$, $\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}=\overline{f'}$,计算.

11.设 D 是域, f:D $\to\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ 是非常数的全纯函数,则 $\log|f(z)|$ 和 Arg$f(z)$ 是 D 上的调和函数,而 $|f(z)|$ 不是 D 上的调和函数.

提示: $\Delta\log|f(z)|=\frac{1}{2}\Delta\log|f(z)|^2=2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\log|f(z)|^2$

$$=2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{|f(z)|^2}\frac{\partial f(z)\overline{f(z)}}{\partial\bar z}\right)=2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(z)\overline{f'(z)}}{|f(z)|^2}\right)$$

$$=2\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\frac{f'(z)}{f(z)}}\right)=0$$

$\frac{f(z)}{\overline{f(z)}}=e^{2i\arg f(z)}$ 对 z 求偏导

$$\frac{\partial}{\partial z}(\arg f(z))=\frac{1}{2i}\frac{f'(z)}{f(z)} \qquad \frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}(\arg f(z))=0$$

$$4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}(|f(z)|)=|f(z)|^{-1}|f'(z)|^2$$

如果$|f(z)|$调和,则 $f'(z)\equiv 0$,从而 f 是常数,矛盾.

12.设 D,G 是域, $f:D\to G$ 是全纯函数,证明:若 u 是 G 上的调和函数,则$u\circ f$ 是 D 上的调和函数.

证明: 因为 u 是 G 上的调和函数,局部存在全纯函数g, s.t. $u=\operatorname{Re}g$, 则$g\circ f$ 局部全纯,

于是局部有$u\circ f=\operatorname{Re}(g\circ f)$, 从而$u\circ f$ 调和.

15.举例说明:存在 B(0,1)\{0} 上的调和函数,它不是 B(0,1)\{0} 上全纯函数的实部.

解: $u(z)=\log|z|$是 B(0,1)\{0} 上的调和函数,它不是 B(0,1)\{0} 上全纯函数的实部.

(反证) 假设存在 B(0,1)\{0}上的全纯函数 $f(z)$,使得$\operatorname{Re}f(z)=\log|z|$,

设 $f(z)=\log|z|+iv(z)$, $v(z)$是实值函数.

则$e^{f(z)}=|z|\cdot e^{iv(z)}$,从而$\left|\frac{e^{f(z)}}{z}\right|=\left|e^{iv(z)}\right|=1, \forall z\in B(0,1)\backslash\{0\}$.

由题 2.(iv) 可知$\frac{e^{f(z)}}{z}\equiv$常数, 故存在$q\in ¡$ s.t. $e^{f(z)}=ze^{iq}$

即$|z|\cdot e^{iv(z)}=ze^{iq}\Rightarrow e^{iv(z)}=e^{i(\arg z+q)}\Rightarrow v(z)=argz+q+2kp$.

由$v(z)$的连续性可知k是常数.

于是$argz=v(z)-q-2kp$ 在 B(0,1)\{0} 连续,不可能.

16.设 $f=u+iv$, $z_0=x_0+iy_0$.证明:

(i) 如果极限$\lim\limits_{z\to z_0}\operatorname{Re}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$存在,那么$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$和$\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$存在,并且相等.

(ii) 如果极限 $\lim\limits_{z\to z_0}\operatorname{Im}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在,那么 $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ 存在,而且

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

证明:(i) $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} \qquad (z = x + iy_0) \quad (z_0 = (x_0, y_0))$

$$= \lim_{x \to x_0} \mathrm{Re} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \mathrm{Re} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \mathrm{Im} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \qquad (z = x_0 + iy)$$

$$= \lim_{z \to z_0} \mathrm{Im} \frac{f(z) - f(z_0)}{-i(z - z_0)}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \mathrm{Im}\, i \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \mathrm{Re} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(ii)利用 $\mathrm{Im}\, f(z) = \mathrm{Re}[-if(z)]$,由(i)即得.

§2.3 习题

1．求映射 $w=\frac{z-i}{z+i}$ 在 $z_1=-1$ 和 $z_2=i$ 处的转动角和伸缩率.

解：因为 $f=\frac{z-i}{z+i}$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z+i-z+i}{(z+i)^2}=\frac{2i}{(z+i)^2}$$

$$\left|f'(z_1)\right|=\left|\frac{2i}{(-1+i)^2}\right|=1 \qquad \arg f'(z_1)=\arg(-1)=p$$

$$\left|f'(z_2)\right|=\left|\frac{2i}{(2i)^2}\right|=\left|\frac{i}{-2}\right|=\frac{1}{2} \qquad \arg f'(z_2)=-\frac{p}{2}$$

2．设 f 是域 D 上的全纯函数，且 $f'(z)$ 在 D 上不取零值，试证：

（i）对每一个 $u_0+iv_0\in f(D)$，曲线 $\mathrm{Re}\, f(z)=u_0$ 和曲线 $\mathrm{Im}\, f(z)=v_0$ 正交；

证明：（i）$u=u_0$ 和 $v=v_0$ 是 uv 平面中的正交直线.因为 $f'(z)\neq 0$,故 f 是保角的.

从而曲线 $\mathrm{Re}\, f(z)=u_0$ 和曲线 $\mathrm{Im}\, f(z)=v_0$ 的夹角等于直线 $u=u_0$ 和 $v=v_0$ 的夹角,等于 $\frac{p}{2}$

§2.4 习题

1. 验证$\overline{e^{z}}=e^{\bar{z}}$

证明：令$z=x+iy$,则$\bar{z}=x-iy$

$$e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y)\Rightarrow\overline{e^{z}}=e^{x}(\cos y-i\sin y)$$

$$e^{\bar{z}}=e^{x}(\cos y-i\sin y)$$

所以$\overline{e^{z}}=e^{\bar{z}}$.

3.证明：若$e^{z}=1$，则必有$z=2kp\,i,k=0,\pm1,\cdots$.

证明：$e^{z}=1\Leftrightarrow e^{x}=|e^{z}|=1,\ Arge^{z}=y+2kp=0$

$$\Leftrightarrow x=0,y=2kp,k\in\boldsymbol{Z}$$

$$\Leftrightarrow z=2kp\,i,\quad k\in\boldsymbol{Z}.$$

4.设f是整函数，$f(0)=1$. 证明：

(i)若$f^{'}(z)=f(z)$对每个$z\in$ £成立,则$f(z)\equiv e^{z}$;

(ii) 若对每个$z,w\in$ £ ,有$f(z+w)=f(z)f(w)$,且$f^{'}(0)=1$,则$f(z)\equiv e^{z}$.

证明：

（i）$(f(z)e^{-z})^{'}=f^{'}(z)e^{-z}-f(z)e^{-z}=f(z)e^{-z}-f(z)e^{-z}=0.$

$f(z)e^{-z}=c$,$1\times1=c,c=1$，故$f(z)\equiv e^{z}$

(ii) $f'(z+w)=f'(z)f(w)$,令$z=0\Rightarrow f'(w)=f(w)$

7.设f在 £ $\backslash(-\infty,0]$中全纯，$f(1)=0$. 证明：

（i）若$f^{'}(z)=e^{-f(z)},z\in$ £ $\backslash\left(-\infty,0\right]$,则$f(z)\equiv\log z$；

(ii)若$f(zw)=f(z)+f(w)$,$z\in$ £ $\backslash\left(-\infty,0\right],w\in\left(0,\infty\right)$,且$f^{'}(1)=1$,则$f(z)\equiv\log z$.

证明：

（i）令$F(z)=e^{f(z)}-z$,则$F^{'}(z)=e^{f(z)}\cdot f^{'}(z)-1=0$

$\Rightarrow F(z) = c$ (常数)

令 z=1,则F(1)=e$^{f(1)}-1 = e^0 - 1 = 0 = c$.

故 $\left.\begin{matrix} e^{f(z)} = z \\ f(1) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(z) = \log z$

(ii)提示 $w f'(zw) = f'(z)$, 令 $z = 1$ 得 $f'(w) = \dfrac{1}{w}$.

8．证明： $f(z) = z^2 + 2z + 3$ 在 $B(0,1)$ 中单叶.

证明： 取 $\forall z_1$， $z_2 \in B(0,1), z_1 \neq z_2$

$f(z_1) - f(z_2) = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 + 2)$

$z_1 \neq z_2, z_1$， $z_2 \in B(0,1) \Rightarrow f(z_1) - f(z_2) \neq 0 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

故 $f(z)$ 在 $B(0,1)$ 中单叶.

12．设 f 在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上全纯， $f(1) = 1, m > 0$. 证明：

(i) 若 $f'(z) = m\dfrac{f(z)}{z}, z \in \boldsymbol{C} \setminus (-\infty, 0]$，则 $f(z) \equiv |z|^m e^{im\arg z}$;

(ii) 若 $f(zw) = f(z) f(w)$， $z \in \boldsymbol{C} \setminus (-\infty, 0], w \in (0, \infty)$, 且 $f'(1) = m$, 则

$$f(z) \equiv |z|^m e^{im\arg z}$$

证明：(i) 要证 $f(z) = |z|^m e^{im\arg z}$，即证 $f(z) = e^{m\log z}$

$\left(f(z)e^{m\log z}\right)' = 0$, 及 $f(1) = 1$

$\Rightarrow f(z) = e^{m\log z} = |z|^m \cdot e^{im\,Argz}$.

(ii) $zf(zw) = f(z) f'(w)$ 令 $w = 1$ 得 $zf(z) = m f(z)$

即 $f'(z) = m\dfrac{f(z)}{z}$

14.证明:

(i) $\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w$;

(ii) $\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w$;

证明:(i) $\cos(z+w)+i\sin(z+w)=e^{i(z+w)}$

$$=\cos z\cos w-\sin z\sin w+i\left(\sin z\cos w+\cos z\sin w\right) \qquad (1)$$

在上式中以$-z$，$-w$代入，得

$$\cos(z+w)-i\sin(z+w)$$

$$=\cos z\cos w-\sin z\sin w-i\left(\sin z\cos w+\cos z\sin w\right) \qquad (2)$$

$(1)+(2)$ 得 $\cos(z+w)=\cos z\cos w-\sin z\sin w$

$(1)-(2)$ 得 $\sin(z+w)=\sin z\cos w+\cos z\sin w$

19.证明: $w=\sin z$ 将半条形域$\left\{z\in\mathbb{C}:-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{2},\operatorname{Im}z>0\right\}$一一地映为上半平面.

证明: $w=\sin z=\cos(\frac{\pi}{2}-z)=\cos(z-\frac{\pi}{2})$ 令$u=z-\frac{\pi}{2}$,

则$w=\cos u$是由指数$z=e^{iu}$, $(-\pi<\operatorname{Re}u<0,\operatorname{Im}u>0)$,

与 Rokovsky 函数$w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $(z\in B(0,1)\setminus\{0\},-\pi<argz<0)$, 的复合.

故$w=\sin z$将半条形区域$\{z\in\mathbb{C}:-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re}z<\frac{\pi}{2},\operatorname{Im}z>0\}$一一映成上半平面.

20.证明$B(0,1)$ 是 $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ 的单叶性域,并求出 $f(B(0,1))$.

证明: $f(z_1)-f(z_2)=\frac{1-z_1z_2}{[(1-z_1)(1-z_2)]^2}(z_1-z_2)$

给出 f 的单叶性

$z\neq 0$ 时, $\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{z}+z-2$ 由 Rokovsky 函数的性质易得

$f(B(0,1))=\mathbb{C}\setminus(-\infty,-\frac{1}{4}]$

21.当z按逆时针方向沿圆周$\{z:|z|=2\}$旋转一圈后,计算下列函数辐角的增量:

(iii) $(z^2+2z-3)^{\frac{1}{4}}$;

(iv) $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

解:

(iii) $(z^2+2z-3)^{\frac{1}{4}}=[(z+3)\cdot(z-1)]^{\frac{1}{4}}$

-3在圆周$|z|=2$外,1 在圆周$|z|=$内

所以当z按逆时针方向沿圆周旋转一圈后，辐角的增量为$\frac{\pi}{2}$

(iv) $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\dfrac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{|z+1|}\left[(z-1)(\bar{z}+1)^{\frac{1}{2}}\right]$

$z=\pm 1$均在圆周$|z|=2$内,所以辐角的增量为 0.

22.设 $f(z)=\dfrac{z^{p-1}}{(1-z)^p}, 0<p<1$. 证明: f 能在域 $D=£\setminus[0,1]$ 上选出单值的全纯分支.

证明: $f(z)=\dfrac{z^{p-1}}{(1+e^{ip}z)^p}=\dfrac{1}{e^{ip}z}\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^p$

只需考虑 $g(z)=\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^p$

设g 是 D 中的简单闭曲线,则当z 沿g 逆时针绕行一周时，若g 内部不含$[0,1]$,则辐角增量为 0，若$[0,1]$位于g 内部,则辐角增量为$2p\ p+2p(-p)=0$.

故 g 从而 f 能在域 $D=£\setminus[0,1]$ 上选出单值的全纯分支.

23.证明: $f(z)=Log\left(\dfrac{z^2-1}{z}\right)$能在域 $D=£\setminus\left((-\infty,-1]\cup[0,1]\right)$ 上选出单值的全纯分支.

证明: $\dfrac{z^2-1}{z}$ 将 $£\setminus\left((-\infty,-1]\cup[0,1]\right)$ 映入 $£\setminus(-\infty,0]$，而对数函数在 $£\setminus(-\infty,0]$ 上能选出全纯分支.

24.设单叶全纯映射 f 将域 D 一一地映为 G,证明:G 的面积为$\iint\left|f'(z)\right|^2dxdy$.

证明:令 $z=x+iy$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

变换行列式 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left|\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2$$

$$=\left|f'(z)\right|^2$$

$$\therefore\quad S_G=\iint_D\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|dxdy=\iint_D\left|f'(z)\right|^2dxdy.$$

25.设 f 是域 D 上的单叶全纯映射, $z=g(t),(a\le t\le b)$是 D 中的光滑曲线,

证明:$w=f(g(t))$的长度为$\int_a^b\left|f'(g(t))\right|\left|g'(t)\right|dt$

证明: $\dfrac{dw}{dt}=f'(g(t))g'(t)$

故 $w=f(g(t))$的长度为$\int_a^b\left|f'(g(t))\right|\left|g'(t)\right|dt$

26.设 D 是 z 平面上去掉线段 $[-1,i],[1,i]$ 和射线 $z=it \quad (1\le t<\infty)$ 后得到的域,证明函数 $Log(1-z^2)$ 能在 D 上分出单值的全纯分支.设 f 是满足 $f(0)=0$ 的那个分支,试计算 $f(2)$ 的值.

解: 取 D 中任一简单闭曲线 g ,则 ± 1 都不在 g 内部,

从而 z 沿 g 逆时针绕行一周时, $1-z^2=(1-z)(1+z)$ 辐角的增量为 0,

故能选出全纯分支.

设 $f(z)=\log|1-z^2|+iarg(1-z^2)+2kp$. 由 $f(0)=0\Rightarrow k=0$, 故

$f(2)=\log 3+iarg(-3)=\log 3+ip$.

§2.5 习题

1. 试求把上半平面映为上半平面的分式线性变换,使得∞,0,1 分别映为 0,1,∞.

解: $w=T(z)=\dfrac{-1}{z-1}$

2. 证明: 分式线性变换$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$把上半平面映为上半平面的充要条件是a,b,c,d 都是实数,而且$ad-bc>0$.

证明: 必要性：因为线性变换把实轴映为实轴,

故$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$中a,b,c,d 都是实数；

因为$w(i)=\dfrac{ac+bd+(ad-bc)i}{c^2}$属于上半平面，故$ad-bc>0$.

充分性：对$z=0,1,\infty$, 都有$w(z)\in \boldsymbol{R}$,从而w 将实轴映为实轴,

又 $\operatorname{Im}w(i)=ad-bc>0$,故将上半平面映为上半平面.

4.试求把单位圆盘的外部$\{z:|z|>1\}$ 映为右半平面$\{w:\operatorname{Re}w>0\}$的分式线性变换,使得

(i)1,-i,-1 分别变为 i,0,-i;

(ii)-i,i,1 分别变为 i,0,-i.

解:(i)$w=T(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$

(ii)$w=T(z)=\dfrac{z-i}{(2-i)z+2i-1}$

10.设$T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$是一个分式线性变换,如果记$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ g & d \end{pmatrix}$,那么

$T^{-1}(z)=\dfrac{a\,z+b}{g\,z+d}$.

证明:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ l & d \end{pmatrix}$$

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}\Rightarrow czT(z)+dT(z)=az+b\quad\Rightarrow T^{-1}(z)=\frac{b-dz}{cz-a}=\frac{a\,z+b}{g\,z+d}$$

从而证得$T^{-1}(z)=\dfrac{a\,z+b}{g\,z+d}$.

11.设$T_1(z)=\dfrac{a_1+b_1}{c_1+d_1}$,$T_2(z)=\dfrac{a_2+b_2}{c_2+d_2}$是两个分式线性变换,如果记

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$那么$(T_1 \mathbf{o} T_2)(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$.

证明: $(T_1 \mathbf{o} T_2)(z)=\dfrac{a_1a_2z+a_1b_2+b_1c_2z+b_1d_2}{c_1a_2z+c_1b_2+d_1c_2z+d_1d_2}$

又$\mathbf{Q}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{cases} a_1a_2+b_1c_2=a \\ a_1b_2+b_1d_2=c \\ c_1b_2+d_1d_2=d \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1a_2z+a_1b_2+b_1c_2z+b_1d_2}{c_1a_2z+c_1b_2+d_1c_2z+d_1d_2}=\frac{az+b}{cz+d}$$

从而$(T_1 \mathbf{o} T_2)(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$.

12.设Γ是过-1 和 1 的圆周, z 和 w 都不在圆周上.如果$zw=1$, 那么 z 和 w 必分别于Γ的内部或外部.

证明:由圆的对称性知Γ的圆心必然在虚轴上，设圆周与虚轴交个交点为z_1， z_2.

又由平面几何知识知$|z_1|\cdot|z_2|=1$,从而$z_2=\dfrac{1}{z_1}$.

设z在Γ内部，则z位于走向 1， z_1,-1 的左边,因此分式线性变换$T(\mathrm{x})=\dfrac{1}{x}$，将$\dfrac{1}{\mathrm{z}}=T(z)$映为走向$T(1)$， $T(\mathrm{z}_1)$， $T(-1)$, 即 1， z_2， -1 的左边.

注意$T(\Gamma)=\Gamma$，走向 1， z_2， -1 的左边即Γ的外部，故$\dfrac{1}{\mathrm{z}}$在Γ外部.

15.求一单叶全纯映射,把除去线段$[0,1+i]$的第一象限映为上半平面.

提示: 先作变换$z_1=z^4$,再作$z_2=z_1+4$,最后作变换$z_3=\sqrt{z_2}$可得.

16. 求一单叶全纯映射,把半条形域$\left\{z:-\dfrac{p}{2}<\operatorname{Re} z<\dfrac{p}{2},\operatorname{Im} z>0\right\}$映为上半平面,且把$\dfrac{p}{2},-\dfrac{p}{2}$,0 分别映为 1,-1,0.

提示: 先作变换$z_1=iz$,再作 $z_2=e^{z_1}, z_3=-iz_2, z_4=\dfrac{1}{2}(z_3+\dfrac{1}{z_3})$.

即 $w=\frac{1}{2}(-ie^{iz}+\frac{1}{-ie^{iz}})$

17. 求一单叶全纯映射,把除去线段 $[a,a+hi]$ 的条形域 $\{z:0<\operatorname{Im}z<1\}$ 映为条形域 $\{w:0<\operatorname{Im}w<1\}$,其中,a 是实数, $0<h<1$

提示:先作变换 $z_1=e^{pz}$,再作变换 $z_2=\frac{z_1-e^{ap}}{z_1+e^{ap}}$ 便可得结论.

19.求一单叶全纯映射,把除去线段 $[1,2]$ 的单位圆盘的外部映为上半平面.

提示:先作变换 $z_1=\frac{z-1}{z+1}$,再作变换 $z_2=iz_1, z_3=z_2{}^2, z_4=z_3+\frac{1}{9}, z_5=\sqrt{z_4}$

即 $w=\sqrt{(i\frac{z-1}{z+1})^2+\frac{1}{9}}$ 为所求的单叶全纯映射.

第三章 全纯函数的积分表示

§3.1 习题

1.计算积分 $\int\limits_{g}\frac{2z-3}{z}dz$，其中，$g$ 为

(iii)沿圆周 $\{z\in £:|z|=2\}$ 的正向.

$$\int\limits_{g}\frac{2z-3}{z}dz=2\int\limits_{g}dz-\int\limits_{g}\frac{3}{z}dz=0-6p\mathrm{i}=-6p\,i$$

2.计算 $\int\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z+2}$, 并证明，$\int\limits_{0}^{p}\frac{1+2\cos q}{5+4\cos q}dq=0$.

奇点在区域外积分为 0

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z+2}=\int\limits_{0}^{2p}\frac{\mathrm{d}e^{iq}}{e^{iq}+2}=\int\limits_{0}^{2p}\frac{\mathrm{i}e^{iq}}{e^{iq}+2}dq=\mathrm{i}\int\limits_{0}^{2p}\frac{e^{iq}(e^{-iq}+2)}{(e^{iq}+2)(e^{-iq}+2)}dq=0$$

$$\Rightarrow\int\limits_{0}^{2p}\frac{1+2e^{iq}}{1+2e^{iq}+2e^{-iq}+4}dq=0$$

$$\Rightarrow\int\limits_{0}^{2p}\frac{1+2\cos q+2i\sin q}{5+2\cos q+2\sin q+2i\cos(-q)+2i\sin(-q)}dq=0$$

$$\Rightarrow\int\limits_{0}^{2p}\frac{1+2\cos q+2i\sin q}{5+4\cos q}dq=0$$

$$\Rightarrow\int\limits_{0}^{2p}\frac{1+2\cos q}{5+4\cos q}dq+\int\limits_{0}^{2p}\frac{2\sin q}{5+4\cos q}dq\,i=0$$

$$\left(\int\limits_{0}^{p}+\int\limits_{p}^{2p}\right)\frac{1+2\cos q}{5+4\cos q}dq=0$$

由对称性

$$\int\limits_{0}^{p}\frac{1+2\cos q}{5+4\cos q}dq=\int\limits_{p}^{2p}\frac{1+2\cos q}{5+4\cos q}dq$$

所以 $\int\limits_{0}^{p}\frac{1+2\cos q}{5+4\cos q}dq=0$

3.计算积分 $\int\limits_{|z|=3}\frac{2z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z$.

$$\int_{|z|=3}\frac{2z-1}{z(z-1)}dz=\int_{|z|=3}\frac{z-1+z}{z(z-1)}dz=\int_{|z|=3}\frac{1}{z}dz+\int_{|z|=3}\frac{1}{z-1}dz=4\pi i$$

4.如果多项式 Q(z)比多项式 P(z)高两次，试证： $\lim_{R\to\infty}\int_{|Z|=R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0$

证明： $\lim_{R\to\infty}\frac{P(z)z^2}{Q(z)}=A$ (A 为某个常数)

从而存在 M>0,R_0>0 使得当 R≥R_0时，有 $\left|\frac{P(z)z^2}{Q(z)}\right|\le M$

因此$\left|\int_{|z|=R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\right|\le\int_{|z|=R}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right||dz|\le\int_{|z|=R}\frac{M}{|z|^2}|dz|=\frac{2\pi M}{R}\to 0(R\to\infty)$

所以$\lim_{R\to\infty}\int\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0$

6.设 f∈ $C^1(D)$, γ 是域 D 中分别以 a 和 b 为起点和终点的可求长曲线.证明：

$$\int_\gamma\frac{\partial f(z)}{\partial z}dz+\frac{\partial f(z)}{\partial\bar z}d\bar z=f(b)-f(a)$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}),dz=dx+idy$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}),d\bar z=dx-idy$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z}dz+\frac{\partial f(z)}{\partial\bar z}d\bar z=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y})(dx+idy)+\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y})(dx-dy)$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=df$$

故$\int_\gamma\{\frac{\partial f(z)}{\partial z}dz+\frac{\partial f(z)}{\partial\bar z}d\bar z\}=\int_\gamma df=f(b)-f(a)$

8.设γ 是域 D 中以 a 为起点，以 b 为终点的可求长曲线，f,g∈ $H(D)\cap C^1(D)$. 证明分部积分公式： $\int_\gamma f(z)g'(z)dz=f(z)g(z)|_a^b-\int_\gamma f'(z)dz.$

$$\int_g f(z)g'(z)dz+\int_g f'(z)g(z)dz=\int_g [f'(z)g(z)+f(z)g'(z)]dz=\int_g [f(z)g(z)]'dz=f(z)g(z)|_a^b$$

故 $\int_g f(z)g'(z)dz=f(z)g(z)|_a^b-\int_g f'(z)g(z)dz$

9.设 g 是正向可求简单曲线，证明：g 内部的面积为 $\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_r \bar{z}dz$.

证明：由公式得 $\int_{\mathrm{r}} \bar{z}dz=\int_D (-\frac{\partial \bar{z}}{\partial z})\ \mathrm{d}z\wedge d\bar{z}=-\int_D dz\wedge d\bar{z}$

$=-\int_D (dx+idy)\wedge(dx-idy)=\int_{\mathrm{D}} 2\mathrm{i}dx\wedge dy=\int_{\mathrm{D}} 2\mathrm{i}dA$

=2iA

所以 $A=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_r \bar{z}dz$

11.设 f 在 z_0 处连续，证明：

（i）$\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(z_0+re^{iq})dq=f(z_0)$；

(ii) $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{2pi}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0)$.

证明：(i) $\left|\frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(z_0+re^{iq})dq-f(z_0)\right|\le\frac{1}{2p}\int_0^{2p}|f(z_0+re^{iq})-f(z_0)|dq$

$\le\sup\limits_{|z-z_0|=r}|f(z)-f(z_0)|\to 0(r\to 0^+)$

所以 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(z_0+re^{iq})dq=f(z_0)$.

(ii) $\frac{1}{2pi}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(z_0+re^{iq})dq$

故 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{2pi}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0)$

12.设 $D=\{z\in £:q_0<\arg(z-a)<q_0+a\}(0<a\le 2p)$，$f$ 在 $\overline{D}\setminus\{a\}$ 上连续，证明：

（i）如果 $\lim\limits_{\substack{z\to a\\ z\in\overline{D}\setminus\{a\}}}(z-a)f(z)=A$，那么 $\lim\limits_{r\to 0}\int_{\substack{|z-a|=r\\ z\in D}} f(z)dz=iaA$;

(ii)如果 $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in\overline{D}\setminus\{a\}}}(z-a)f(z)=B$,那么 $\lim\limits_{z\to\infty}\int\limits_{\substack{|z-a|=R\\ z\in D}} f(z)dz = iaB$.

证明：(i)

$$\left|\int\limits_{\substack{|z-a|=r\\ z\in D}} f(z)dz-\mathrm{i}aA\right| = \left|\int\limits_{\substack{|z-a|=r\\ z\in D}} f(z)-\frac{A}{z-a}dz\right| \le \frac{1}{r}\int\limits_{\substack{|z-a|=r\\ z\in D}} |(z-a)f(z)-A||dz|$$

$$\le \sup_{\substack{|z-a|=r\\ z\in D}} |(z-a)f(z)-A| \to 0(\mathrm{r}\to 0^+)$$

(ii)略

§3.2 习题

1.计算积分：

(i) $\int\limits_{|z|=r}\frac{|dz|}{|z-a|^2}, |a|\neq r$

$$\int\limits_{|z|=r}\frac{|dz|}{|z-a|^2} = \int_0^{2p}\frac{rdq}{(re^{iq}-a)(re^{-iq}-\overline{a})} = \frac{r}{i}\int\limits_{|z|=r}\frac{dz}{(z-a)(r^2-\overline{a}z)}$$

$$=\frac{-ir}{r^2-|a|^2}\int\limits_{|z|=r}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-r^2/\overline{a}}\right)dz = \frac{2pr}{|r^2-|a|^2|}$$

(iii) $\int\limits_{|z|=5}\frac{zdz}{z^4-1};$

$$\int\limits_{|z|=5}\frac{zdz}{z^4-1} = \frac{1}{2}\int\limits_{|z|=5}\frac{dz^2}{(z^2-1)(z^2+1)} = \frac{1}{4}\int\limits_{|z|=5}\left(\frac{1}{z^2-1}-\frac{1}{z^2+1}\right)dz^2 = 0$$

(iv) $\int\limits_{|z|=2a}\frac{e^z}{z^2+a^2}dz, a>0.$

$$\int\limits_{|z|=2a}\frac{e^z}{z^2+a^2}dz = \frac{1}{2ai}\int\limits_{|z|=2a}\frac{e^z}{z-ai}dz - \frac{1}{2ai}\int\limits_{|z|=2a}\frac{e^z}{z+ai}dz$$

$$=\frac{1}{2ai}\cdot 2pi\cdot e^{ai} - \frac{1}{2ai}2pi\cdot e^{-ai} = \frac{2p\mathrm{i}}{a}\sin a$$

2.设 f 在 $\{z\in \mathbb{C} : r<|z|<\infty\}$ 中全纯，且 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=A$.证明：

$$\int\limits_{|z|=R} f(z)dz = 2piA,\ \text{这里 } R>\mathrm{r}$$

证明：设 $r<R<R'<\infty$, 利用 $Cauchy$ 积分公式得

$$\left|\int_{|z|=R} f(z)dz-2\pi iA\right|=\left|\int_{|z|=R'} f(z)dz-\int_{|z|=R'}\frac{A}{z}dz\right|\le\frac{1}{R'}\int_{|z|=R'}|zf(z)-A||dz|$$

$$\le 2\pi\cdot\sup_{|z|=R'}|zf(z)-A|\to 0(R'\to\infty)$$

4.设 $0<r<R$, f 在 $B(0,R)$ 中全纯.证明：

（i）$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$;

（ii）$f(0)=\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z|<r} f(z)dxdy$.

证明：（i）$\forall R>\delta>0$, 由 $Cauchy$ 积分公式得 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\delta}\frac{f(z)}{z}dz$

即 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\delta e^{i\theta})d\theta$，令 $\delta\to 0$，则有 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta=f(0)$

$$\text{(ii)}\ \frac{1}{\pi r^2}\int_{|z|<r} f(z)dxdy=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r \rho d\rho\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta})d\theta \qquad (1)$$

利用（i）得 $\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta})d\theta=2\pi f(0)$ （2）

由（1）和（2）式得 $f(0)=\frac{1}{\pi r^2}\int_{|z|<r} f(z)dxdy$

5.设 u 是 B(0,R)中的调和函数，$0<r<R$. 证明：u(0)=$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta$.

证明：单连通域上的调和函数是某个全纯函数 f 的实部：$u=\mathrm{Re}\, f$

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta\Rightarrow u(0)=\mathrm{Re}\, f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta$$

6.设 $0<r<1$.证明：$\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta=0$

证明：令 U(z)= $\ln|z-1|^2$,则 U 在 B(0,1)上调和，由题 5，0=U(0)=

$$\frac{1}{2p}\int_0^{2p} u(re^{iq})dq=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\log(1-2r\cos q+r^2)dq=\frac{1}{p}\int_0^{p}\log(1-2r\cos q+r^2)dq\ .$$

§3.3 习题

1.设 D 是域， $f,g\in H(D)$. 如果 fg' 在 D 上有原函数 j . 证明： fg' 在上 D 有原函数 $fg-j$

证明： $f,g\in H(D)$. 由 $fg'=j$ ，得 $(fg-j)'=fg'$.

3．设 $f\in C^n(\pounds)\,\mathbf{I}\,H(\pounds)$，并且 $f^{(n)}(z)\equiv 0$. 证明： f 必为次数不大于 $n-1$ 的多项式.

证明：归纳法 k=1 时显然，设 k=n−1 时成立，取定 $x\in C$,由 $f^{(n)}(z)\equiv 0\Rightarrow f^{(n-1)}(z)=C$

故 $\left[f(z)-\frac{Cz^{n-1}}{(n-1)!}\right]^{(n-1)}\equiv 0$，从而 $f(z)-\frac{Cz^{n-1}}{(n-1)!}$ 是次数不超过 n-2 的多项式.

5. 设 f 是凸域 D 上的全纯函数，如果对每点 $z\in D$，有 $\mathrm{Re}\left\{f'(z)\right\}>0$，那么 f 是 D 上的单叶函数.

证明： $\forall z_1,z_2\in D$， $z_1\neq z_2$ 则

$$f(z_2)-f(z_1)=\int_{z_1}^{z_2}f'(x)dx=\int_0^1 f'(z_1+t(z_2-z_1))(z_2-z_1)dt$$

则 $\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}=\int_0^1 f'(z_1+t(z_2-z_1))dt$

从而 $\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}\right|\geq\int_0^1\mathrm{Re}\left\{f'(z_1+t(z_2-z_1))\right\}dt>0$

故 $f(z_1)\neq f(z_2)$，这表明 f 是 D 上的单叶函数.

§3.4 习题

1.　　计算下列积分：

（1） $\int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^2-1}dz$

解：$\int\limits_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^2-1}dz=\int\limits_{|z-1|=1}\frac{1}{z-1}\cdot\frac{\sin z}{z+1}dz=2\pi i\left(\frac{\sin z}{z+1}\right)\Big|_{z=1}=i\pi\sin 1$

(2) $\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^2}$;

解：$\int\limits_{|z|=2}\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=2}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)dz=0$

(4) $\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$;

解：与第二题类似，答案为 0.

(6) $\int\limits_{|z|=R}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$,n 为正整数，a$\neq$b 不在圆周|z|=R 上.

解：原式$=\begin{cases}0 & a,b\text{均在圆外.}\\ \dfrac{2\pi i}{(b-a)^n} & a\text{在圆外，b在圆内.}\\ -\dfrac{2\pi i}{(b-a)^n} & a\text{在圆内，b在圆外.}\\ 0 & a,b\text{均在圆内.}\end{cases}$

3.设 D 是由有限条可求长简单闭曲线围成的域，$z_1,\cdots,z_n$ 是 D 中 n 个彼此不同的点.如果 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$，证明：$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{w_n(\zeta)}\frac{w_n(\zeta)-w_n(z)}{\zeta-z}dz$ 是次数不超过 n-1 的多项式，并且 $P(z_k)=f(z_k),k=1,2,\ldots,n.$ 其中，$w_n(z)=(z-z_1)\ldots(z-z_n)$.

（提示：证明 $\frac{w_n(\zeta)-w_n(z)}{\zeta-z}$ 是 z 的次数不超过 n-1 的多项式.）

证明：由于 $w_n(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_n)$

从而 $\frac{w_n(\zeta)-w_n(z)}{\zeta-z}$ 是 z 的 n-1 次多项式，记 $h(x,z)=f(x)\frac{w_n(\zeta)-w_n(z)}{\zeta-z}$

取 $\varepsilon>0$ 充分小，由 Cauchy 积分公式

$$P(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_k|=\varepsilon}\frac{h(\xi,z)}{\prod_{j=1}^{n}(\xi-z_j)}d\xi=\sum_{k=1}^{n}h(z_k,z)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(z_k-z_j)^{-1}$$

因为 $h(\xi,z)=f(\xi)\dfrac{-w_n(z)}{z-z}$ 是 z 的次数不超过 n-1 的多项式，故 P(z)是关于 z 的次数不超过 n-1 的多项式.

又 $-w_n(z)=(z_k-z)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(z_j-z)$，故 $P(z_k)=f(z_k)$ 是关于 z 的次数不超过 n-1 的多项式.

5.设 $f\in H(B(0,1))\cap C(\overline{B(0,1)})$.证明：

$$(1)\ \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=2f(0)+f'(0);$$

$$(2)\ \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=2f(0)-f'(0)$$

（提示：分别计算积分 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1}\left(2+z+\frac{1}{z}\right)f(z)\frac{dz}{z}$ 和 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1}\left(2-z-\frac{1}{z}\right)f(z)\frac{dz}{z}$

即可.）

证明：由 Cauchy 公式，得

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}}ie^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})d\theta,$$

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta \qquad ②$$

又由 Cauchy 定理，$\displaystyle\int_{|z|=1}f(z)dz=0$ 即 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta=0$ ③

②+③得 $f'(0)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos\theta d\theta=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)d\theta$

即 $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta=f'(0)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})d\theta=f'(0)+2f(0)$

6.利用上题结果证明：

设 $f\in H(B(0,1))\cap C(\overline{B(0,1)})$，且 $f(0)=1,\operatorname{Re}f(z)\geq 0$，那么 $-2\leq\operatorname{Re}f'(0)\leq 2$.

证明：$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta=f'(0)+2f(0)$

两边取实部,即

$$\mathrm{Re}\frac{2}{p}\int_0^{2p} f(e^{iq})\cos^2\frac{q}{2}dq = 2+\mathrm{Re}\, f'(0)\geq 0$$

同理 $\frac{2}{p}\int_0^{2p} f(e^{iq})\sin^2\frac{q}{2}dq = 2f(0)-f'(0)$

$$\mathrm{Re}\, f'(0)=2-\frac{2}{p}\int_0^{2p} f(e^{iq})\sin^2\frac{q}{2}dq\leq 2-0=2$$

所以 $-2\leq \mathrm{Re}\, f'(0)\leq 2$.

§3.5 习题

1．设 f 是有界整函数, z_1, z_2 是 $B(0,r)$ 中任意两点.证明: $\int\limits_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz=0$ 并由得出 Liouyille 定理.

证明：利用 Cauchy 积分公式得

$$\int\limits_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz=\int\limits_{|z|=r}\frac{1}{z_1-z_2}\left(\frac{f(z)}{z-z_1}-\frac{f(z)}{z-z_2}\right)dz=2p\,i\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}$$

另一方面，由于 f 有界, $\exists M>0, s.t.\left|f(z)\right|\leq M, \forall z\in \boldsymbol{C}$

由 Cauchy 积分定理

$$\left|\int\limits_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz\right|=\left|\int\limits_{|z|=R>r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz\right|\leq\frac{M}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)}\cdot 2p\,R\to 0(R\to\infty)$$

从而

$$2p\,i\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}=0\Rightarrow f(z_1)=f(z_2)\Rightarrow f(z)=C$$

2.设 f 是整函数，如果当 $z\to\infty$ 时, $f(z)=O(|z|^a), a\geq 0,$ 证明 f 是次数不超过 $[a]$ 的多项式.

解：令 $n=[a]+1$

$$\left|f^{(n)}(z)\right|=\left|\frac{n!}{2p\,i}\int\limits_{|z-z|=R}\frac{f(z)}{(z-z)^{n+1}}dz\right|\leq\frac{n!}{2p}\int\limits_{|z-z|=R}\left|\frac{f(z)}{(z-z)^{n+1}}\right||dz|\leq\frac{n!}{2p}\int_{|z-z|=R}\frac{M|z|^a}{R^{n+1}}|dz|$$

$$\leq n!M\frac{(R+|z|)^a}{R^n}\to 0(R\to\infty)$$

故 $f^{(n)}(z)\equiv 0$

4.设 f 是整函数,如果 $f(\mathbb{C})\subset\{z\in\mathbb{C};\operatorname{Im}z>0\}$,证明 f 是一个常值函数.

证明：令 $g(z)=\dfrac{f(z)-i}{f(z)+i}$,则|g(z)|<1,g 是整函数.

从而 $g(z)=\dfrac{f(z)-i}{f(z)+i}=c\Rightarrow f(z)=$ 常

5.设 f 是整函数,如果 $f(\mathbb{C})\subset\mathbb{C}\setminus[0,1]$ 证明 f 是一个常值函数.

证明：令 $g(z)=\dfrac{f(z)}{1-f(z)}$,则

$g(\mathbb{C})\subset\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$.再令 $h(z)=\sqrt{g(z)}$

则 $|h(\mathbb{C})|\subset\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$

由上题知 h 常值,故 f 常值.

6.设 f 在域 D 上全纯, $z_0\in D$ 定义

$$F(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z\in D\setminus\{z_0\};\\ f'(z_0), & z=z_0.\end{cases}$$

证明： $F\in H(D)$

证明： $F(z_0)=f'(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim\limits_{z\to z_0}F(z_0)$

故 F 在 z_0 点也连续.将 F 限制在 $B(z_0,e)$ 上,则 $|F|\le M$,对 D 内任一简单闭曲线 g ,可取一含于 $B(z_0,e)$ 的简单闭曲线使得 $\int_g f(z)dz=\int_{g_e} f(z)dz$,对 $\forall e>0$, 由此易得 $\int_g f(z)dz=0$,从而 F 在 D 上全纯.

7.设 g 是可求长曲线, f 在域 D 上连续,在 $D\setminus g$ 上全纯.证明： f 在 D 上全纯.

证明：任取 D 中简单闭曲线 g_0

（1）当 g 含于 g_0 内部时,延长 g ,交 g_0 于 A,B 两点.

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1+\overline{AB}} f(z)dz + \int_{\gamma_2+\overline{BA}} f(z)dz = 0$$

（2）同理,当γ ,γ_0相交时,$\int_{\gamma_0} f(z)dz = 0$

故由 Morera 定理知 f 在 D 上全纯.

§3.6 习题

1、设 D 是由有限条可求长简单闭曲线围成的域, $f \in C^1(\overline{D})$.证明：

（i） $\iint_D \frac{\partial f(x)}{\partial \bar{x}} d\bar{x} \wedge dx = \int_{\partial D} f(x)dx$

（ii） $\iint_D \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx \wedge d\bar{x} = \int_{\partial D} f(x)d\bar{x}$

证明： $f(x)$ 是域上的一个 0 次微分形式 $f \in C^1(\overline{D})$,根据定理 3.6.1 $\int_{\partial D} f = \int_D df$

可得 $\int_{\partial D} f(x)dx = \int_D df(x) \wedge dx = \int_D (\frac{\partial f(x)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x)}{\partial \bar{x}}d\bar{x}) \wedge dx = \int_D \frac{\partial f(x)}{\partial \bar{x}} d\bar{x} \wedge dx$

同理 $\int_{\partial D} f(x)d\bar{x} = \int_D (\frac{\partial f(x)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x)}{\partial \bar{x}}d\bar{x}) \wedge d\bar{x} = \int_D \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx \wedge d\bar{x}$

4、设 D 是由有限条可求长简单闭曲线围成的域, f 在 $\overline{D}$ 上全纯, $z \in D$.证明：

$$\iint_D \frac{\overline{f'(x)}}{\overline{x-z}} dx \wedge d\bar{x} = \int_{\partial D} (\frac{f(x)}{x-z} + \frac{\overline{f(x)}}{\overline{x-z}} d\bar{x})$$

证：因 $f \in H(\overline{D})$,从而 $\bar{f} \in C^1(\overline{D})$,则对 $\bar{f}$ 用 Pompeiu 公式

$$\overline{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\overline{f(x)}}{x-z} dx + \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{\partial \overline{f(x)}}{\partial \bar{x}} \frac{1}{x-z} dx \wedge d\bar{x}$$

从而两边取共轭得

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(x)}{\overline{x-z}} d\bar{x} - \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{f'(x)}{\overline{x-z}} d\bar{x} \wedge dx$$

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(x)}{\bar{x}-\bar{z}} d\bar{x} + \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{f'(x)}{\overline{x-z}} dx \wedge d\bar{x} \qquad (1)$$

$$f(z)=\frac{1}{2p\,i}\int_{\partial D}\frac{f(x)}{x-z}dx \qquad (2)$$

由（1）（2）可得 $\iint_D \frac{f'(x)}{\bar{x}-\bar{z}}dx\wedge d\bar{x}=\int_{\partial D}\left(\frac{f(x)}{x-z}+\frac{f(x)}{\bar{x}-\bar{z}}d\bar{x}\right)$.

§3.7 习题

2.设 D 是域, $f\in C^{\infty}(D)$，证明：若 $u_0\in C^{\infty}(D)$ 是非齐次 $\bar{\partial}$ 方程的解,即 $\frac{\partial u_0}{\partial \bar{z}}=f$，则该方程的解的全体为 $u_0+H(D)$.

提示：显然 $u_0+H\left(D\right)$ 中的元都是解.

另一方面,设 u 是方程的一个解,则 $\frac{\partial\left(u-u_0\right)}{\partial \bar{z}}=f-f=0$,即 $u-u_0$ 满足 C-R 方程,

又 $u\in C^{\infty}\left(D\right)$,故 $u-u_0\in H\left(D\right)$.

第四章 全纯函数的 Taylor 展开及其应用

§4.1 习题

1、证明：复数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$收敛，当且仅当$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\, z_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Im}\, z_n$同时收敛.

证明：由不等式

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\mathrm{Re}\, z_k\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\mathrm{Im}\, z_k\right|\right)\le\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right|\le\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\mathrm{Re}\, z_k\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\mathrm{Im}\, z_k\right|$$

即得结论.

3、设$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$是非空点集 E 上的函数项级数，证明$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在 E 上一致收敛当且仅当

$\sum_{n=1}^{\infty} Ref_n(z)$和$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Im}\, f_n(z)$在 E 上一致收敛.

证明：同上题.

6、设$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$是复数项级数，且$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|}=q$. 证明：

（i）当$q<1$时，则$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$绝对收敛.

（ii）当$q>1$时，则$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$发散.

证明：$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|}=q$, 取$r$使得$q<r<1$, 则 n 充分大时，$|z_n|<r^n$

故$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$绝对收敛.

（ii）易知$z_n\not\to 0$

8、设$z^n\in \mathbb{C}\setminus\{0\}$，$\forall n\in N$，且$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=q$，证明：

（i）当$q<1$时，则$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$绝对收敛.

（ii）当 $q>1$ 时，则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 可能收敛也可能发散.

证明：（i）取 r 使得 $q<r<1$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时，有 $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}<r$

$\Rightarrow |z_{N+k}|<r^k|z_N|$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|=\sum_{n=1}^{N}|z_n|+\sum_{k=1}^{\infty}|z_{N+k}|<\sum_{n=1}^{N}|z_n|+|z_N|\sum_{k=1}^{\infty}r^k<\infty$.

（ii）举例说明：

级数 $1+\sum_{k=1}^{\infty}(z^k-z^{k-1})$ 当 $|z|>1$ 时发散；令 $z_{2n-1}=\frac{1}{2^{n+1}}$，$z_{2n}=\frac{1}{2^n}$，

则 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\geq\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{2n}}{z_{2n-1}}\right|=2$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛.

13、证明：若域 D 上的全纯函数列 $\{f_n(z)\}$ 在 D 上内闭一致收敛于 $f(z)$，则 $f(z)$ 在 D 上全纯，并且 $\{f_n^{(k)}(z)\}$ 在 D 上内闭一致收敛于 $f^{(k)}(z)$，$\forall k\in N$.

（1）证明：令 $g_1=f_1$，$g_n=f_n-f_{n-1}, n\geq 2$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(z)$ 在 D 上内闭一致收敛于 $f(z)$.由定理 4.1.9 即得结论.

§4.2 习题

1、设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2 .证明：

（i）$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ 的收敛半径 $R\geq\min(R_1,R_2)$

（ii）$\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nz^n$ 的收敛半径 $R\geq R_1R_2$

（iii）$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{n=k}^{\infty}a_kb_{n-k})z^n$ 的收敛半径 $R\geq\min(R_1,R_2)$

解：（i）若 $|z|<\min(R_1,R_2)$，又 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 都收敛，从而 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n$ 收敛，

故 $R \geq \min(R_1, R_2)$

（ii）由于 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n b_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}$,

则 $\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n b_n|}} \geq \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} \cdot \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|b_n|}}$

故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ 的收敛半径 $R \geq R_1 R_2$.

（iii）若 $|z| < \min(R_1, R_2)$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 都绝对收敛，

于是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) z^n$ 也收敛.

故 $R \geq \min(R_1, R_2)$.

2、求下列幂级数的收敛半径.

（ii） $\sum_{n=0}^{\infty} [3+(-1)^n]^n z^n$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{[3+(-1)^n]^n}} = \frac{1}{4}$$

故幂级数的收敛半径为 $\dfrac{1}{4}$.

3、证明：若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处绝对收敛，则它在 $\overline{B(0, |z_0|)}$ 上绝对一致收敛.

证明：$\forall z \in \overline{B(0, |z_0|)}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z_0|^n$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z_0^n|$ 收敛，从而 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\overline{B(0, |z_0|)}$ 上绝对一致收敛.

4、设正数列 $\{a_n\}$ 单调收敛于零.证明

（i） $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R \geq 1$

（ii）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\partial B(0,1)\setminus\{1\}$ 上处处收敛.

证（i）当 n 充分大时，$0<a_n<1$，从而 $R=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}}\ge 1$

（ii）当 $z\in\partial B(0,1)\setminus\{1\}$ 时

则 $|\sum_{k=0}^{n} z^k|=|\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}|\le\dfrac{2}{|1-z|}$

而 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零，从而由 Dilichlet 判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛.

7、证明：若 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是 $B(0,1)$ 上的有界全纯函数，则 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty$

证：任取 $0<r<1$

由于 $\int_0^{2p}|f(re^{iq})|^2dq=\int_0^{2p} f(re^{iq})\overline{f(re^{iq})}dq=\int_0^{2p}\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{inq}\sum_{m=0}^{\infty}\overline{a_m} r^m e^{-imq}dq$

$$=\int_0^{2p}\sum_{n,m=0}^{\infty} a_n r^n e^{inq}\,\overline{a_m} r^m e^{-imq}dq=\sum_{n,m=0}^{\infty} a_n\overline{a_m} r^{n+m}\int_0^{2p} e^{i(n-m)q}dq$$

$$=2p\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}$$

即 $\dfrac{1}{2p}\int_0^{2p}|f(re^{iq})|^2dq=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}$，由于 f 有界，从而 $\exists M>0$，$|f(z)|\le M$，$z\in B(0,1)$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}\le M^2<+\infty$

令 $r\to 1^-$，得 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\le M^2<+\infty$.

10、设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 将 $B(0,R)$ 一一映为域 G.证明：G 的面积为 $p\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2 R^{2n}$

证：设 $S(G)$ 表示 G 的面积，则

$$S(G)=\iint_{B(0,R)} f'(z)\overline{f'(z)}dxdy=\int_0^R\left(\int_0^{2p} f'(re^{iq})\overline{f'(re^{iq})}dq\right)rdr$$

$$=\int_0^R(2p\sum_{n=0}^{\infty}n^2|a_n|^2r^{2n-2})rdr=(2p\sum_{n=0}^{\infty}n^2|a_n|^2)\int_0^R r^{2n-1}dr=p\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2R^{2n}$$

11、证明幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$在域 D 上一致收敛，当且仅当它在$\overline{D}$上一致收敛.

证明：$\Leftarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$在$\overline{D}$上一致收敛，显然有它在域 D 上一致收敛

$\Rightarrow$由于$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$在域 D 上一致收敛.对$\forall z>0$，$\exists N\in¥^*$，st $\forall p\in N^*$，当$n>N$时，

不等式$\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_kz^k|<\frac{e}{2}$ 对于$\forall z\in D$都成立.

$\forall z_0\in\overline{D}$, $\exists\{z_n\}\subset D$, st $z_n\to z_0(n\to\infty)$

于是对于以上给定的e， p.可选取充分大的$l\in¥^*$

使得$|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(z_l^k-z_0^k)|<\frac{e}{2}$，

因而$|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kz_0^k|\le|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kz_l^k|+|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k(z_l^k-z_0^k)|<e$，

故$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$在$\overline{D}$上一致收敛.

§4.3 习题

1、设 D 是域，$a\in D$，函数f在$D\setminus\{a\}$上全纯. 证明：若$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$，f在D上全纯.

证明：令$F(z)=\begin{cases}(z-a)f(z)=0 & z\neq a\\ 0, & z=a\end{cases}$

则F在D上连续并F在$D\setminus\{a\}$上全纯.

由 Morera 定理得$F\in H(D)$，于是$\lim_{z\to a}f(z)=\lim_{z\to a}\frac{F(z)}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{F(z)-F(a)}{z-a}=F'(0)$,

补充定义$f(0)=F'(0)$，则$f\in H(D)$.

4、设$f\in H(B(0,R))\cap C(\overline{B(0,R)})$，$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}dx$，证明：

（i） $S_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|x|=R} f(x)\dfrac{x^{n+1}-z^{n+1}}{(x-z)x^{n+1}}dx, \forall z\in B(0,R)$

（ii） $f(z)-S_n(z)=\dfrac{z^{n+1}}{2\pi i}\int_{|x|=R} f(x)\dfrac{x^{n+1}}{x^{n+1}(x-z)}dx, \forall z\in B(0,R)$

证明：（i） $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|x|=R} f(x)\dfrac{x^{n+1}-z^{n+1}}{x-z}\dfrac{dx}{x^{n+1}}$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|x|=R} f(x)\frac{x^n+x^{n-1}z+\cdots+xz^{n-1}+z^n}{x^{n+1}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|x|=R}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{f(x)}{x^2}z+\cdots+\frac{f(x)}{x^n}z^{n-1}+\frac{f(x)}{x^n}z^n\right)dx$$

$$=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\cdots+\frac{f(x)}{n!}z^{n+1}=S_n(z)$$

（ii） $f(z)-S_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|x|=R}\dfrac{f(x)}{x-z}dx-\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|x|=R} f(x)\dfrac{x^{n+1}-z^{n+1}}{(x-z)x^{n+1}}dx$

$$=\frac{z^{n+1}}{2\pi i}\int_{|x|=R}\frac{f(x)}{(x-z)x^{n+1}}dx$$

5、是否存在 $f\in H(B(0,1))$，使得下列条件之一成立：

（i） $f(\frac{1}{n})=\dfrac{n}{n+1}, n=2,3\cdots$

$f(\frac{1}{n})=\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}\Rightarrow f(z)=\dfrac{1}{z+1}\in H(B(0,1))$.

(ii) $f(\frac{1}{2n})=0, f(\frac{1}{2n-1})=1, n=1,2,3\cdots$

$f(\frac{1}{2n})=0\Rightarrow f(z)=0$.

$f(\frac{1}{2n-1})=1\Rightarrow f(z)=1$

故不存在.

（iii） $f(\frac{1}{n})=f(-\frac{1}{n})=\dfrac{1}{n^2}, n=2,3,4\cdots$

$f(\frac{1}{n})=\dfrac{1}{n^2}\Rightarrow f(z)=z^2$

$$f(-\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2}\Rightarrow f(z)=z^2$$

故存在.

(iv) $f(\frac{1}{n})=f(-\frac{1}{n})=\frac{1}{n^3},n=2,3,4\,\mathbf{L}$

$$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n^3}\Rightarrow f(z)=z^3$$

$$f(-\frac{1}{n})=\frac{1}{n^3}\Rightarrow f(z)=-z^3$$

故不存在.

6、设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径 $R>0$， $0<r<R$，证明：

（i） $a_nr^n=\frac{1}{p}\int_0^{2p}\left[\operatorname{Re}f(re^{iq})\right]e^{-inq}dq,\forall n\in$ ¥

证明：由于 $a_n=\frac{1}{2pi}\int\limits_{|x|=r}\frac{f(x)}{x^{n+1}}dx=\frac{1}{2pi}\int_0^{2p}\frac{f(re^{iq})}{r^{n+1}e^{i(n+1)q}}re^{iq}\cdot idq$

$$=\frac{1}{2pr^n}\int_0^{2p}f(re^{iq})e^{-inq}dq \qquad (1)$$

又由 $\int\limits_{|x|=r}f(x)x^{n-1}dx=0$，得 $\int_0^{2p}\overline{f(re^{iq})}e^{-inq}dq=0$（2）

（1）+（2）得 $a_n=\frac{1}{2pr^n}\int_0^{2p}2\operatorname{Re}f(re^{iq})e^{-inq}dq$

所以 $a_nr^n=\frac{1}{p}\int_0^{2p}\left[\operatorname{Re}f(re^{iq})\right]e^{-inq}dq,\forall n\in$ ¥

7、设 $f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 在 $B(0,1)$ 上全纯，并且 $\operatorname{Re}f(z)\ge 0,\forall z\in B(0,1)$，证明：

（i） $|a_n|\le 2,\forall n\in$ ¥

（ii） $\frac{1-|z|}{1+|z|}\le\operatorname{Re}f(z)\le f(z)\le\frac{1+|z|}{1-|z|},\forall z\in B(0,1)$

证明：（i） $\forall 0<r<1$，则由第 6 题（i）得

$$|a_n|=|\frac{1}{pr^n}\int_0^{2p}\operatorname{Re}f(re^{iq})e^{-inq}dq|\le\frac{1}{pr^n}\int_0^{2p}\operatorname{Re}f(re^{iq})dq$$

$$=\frac{2}{r^n}\operatorname{Re} f(0)=\frac{2}{r^n}\text{，令 } r\to 1^- \text{ 即得结论.}$$

（ii）由第 6 题（i）得 $a_n=\dfrac{1}{p r^n}\displaystyle\int_0^{2p}\operatorname{Re} f(re^{iq})e^{-inq}dq$，任取 $|z|<r<1$

从而 $$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p r^n}\int_0^{2p} z^n\operatorname{Re} f(re^{iq})e^{-inq}dq$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p}\int_0^{2p}\left(\frac{ze^{-iq}}{r}\right)^n\operatorname{Re} f(re^{iq})dq$$

$$=1+\frac{1}{p}\int_0^{2p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ze^{-iq}}{r}\right)^n\operatorname{Re} f(re^{iq})dq$$

$$=1+\frac{1}{p}\int_0^{2p}\frac{\dfrac{ze^{-iq}}{r}}{1-\dfrac{ze^{-iq}}{r}}\operatorname{Re} f(re^{iq})dq$$

$$=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\operatorname{Re} f(re^{iq})dq+\int_0^{2p}\frac{ze^{-iq}}{r-ze^{-iq}}\operatorname{Re} f(re^{iq})dq$$

$$=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\frac{re^{iq}+z}{re^{iq}-z}\operatorname{Re} f(re^{iq})dq$$

即 $$f(z)=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\frac{re^{iq}+z}{re^{iq}-z}\operatorname{Re} f(re^{iq})dq \qquad (*)$$

从而 $$\operatorname{Re} f(z)=\int_0^{2p}\operatorname{Re}\left(\frac{re^{iq}+z}{re^{iq}-z}\right)\operatorname{Re} f(re^{iq})dq$$

$$=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\frac{|r|^2-|z|^2}{|re^{iq}-z|^2}\operatorname{Re} f(re^{iq})dq$$

$$\ge\frac{1}{2p}\frac{r^2-|z|^2}{(r+|z|)^2}\int_0^{2p}\operatorname{Re} f(re^{iq})dq=\frac{r-|z|}{r+|z|}$$

所以 $\operatorname{Re} f(z)\ge\dfrac{r-|z|}{r+|z|}$，令 $r\to 1^-$，得 $\operatorname{Re} f(z)\ge\dfrac{1-|z|}{1+|z|}$

另一方面 $$\operatorname{Re} f(z)\le|f(z)|\le\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\operatorname{Re} f(re^{iq})\left|\frac{re^{iq}+z}{re^{iq}-z}\right|dq\le\frac{r+|z|}{r-|z|}$$

令 $r \to 1^-$ 得 $\operatorname{Re} f(z) \le |f(z)| \le \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$

因此证明了结论.

12、证明：若 $\dfrac{1}{1-z-z^2}$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,则 Fibonacci 数 a_n 满足关系式

$a_0 = a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \ge 2$

证明：因为 $\dfrac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,从而 $1 = (1-z-z^2)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

即 $1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+2}$

$1 = a_0 + (a_1 - a_0)z + (a_2 - a_1 - a_0)z^2 + \mathbf{L} + (a_n - a_{n-1} - a_{n-2})z^n$

从而 $a_0 = 1, a_1 - a_0 = 0, a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$

所以 $a_0 = a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

§4.4 习题

1. 设 D 是由有限条可求长简单闭曲线围成的域.证明：若 $f, g \in H(\bar{D})$, f 在 ∂D 上没有零点, f 在 D 中的全部彼此不同的零点为 $z_1, z_2, \cdots, z_n$,其相应的阶数分别为 $k_1, k_2, \cdots, k_n$,则

$\dfrac{1}{2pi}\int_{\partial D} g(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{n} k_j g(z_j)$ （说明：这是 Cachy 积分公式和辐角原理的推广）

解：因为 $z = z_j$ 是 f(z)的 k_j 阶零点,从而存在 z_j 的 $e-$球邻域 $U_j \subset D$,使得

$f(z) = (z-z_j)^{k_j} h_j(z)$,其中 $h_j \in H(U_j)$ 且 $h_j(z) \ne 0, z \in U_j$.

由 Cauchy 积分公式得

$$\frac{1}{2pi}\int_{\partial D} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2pi}\int_{|z-z_j|=e} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{n} k_j g(z_j)$$

2. 利用辐角原理证明代数学的基本定理.

证明：设 $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0, a_n \ne 0, n \ge 1$ 是 n 次多项式,则 $\exists R > 0$. 当 $|z| \ge R$ 时, $|a_n z^n| > |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0|$

从而当$|z| \geq R$时,有

$|P_n(z)| = |a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0| > 0$ 这表明$P_n(z)$在

$|z| \geq R$上无零点.

利用辐角原理知, $N = \dfrac{1}{2p}\Delta_g ArgP_n(z)$ 其中 N 表示$P_n(z)$在$|z| < R$上的零点个数,g 为

$\{z;|z| = R\} = \partial B(0,R)$的正向,现在来计算$\Delta_g ArgP_n(z)$，注意到

$\Delta_g ArgP_n(z) = \Delta_g Arga_n z^n + \Delta_g(a_n + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n})$,以及$\Delta_g ArgZ^n = 2np$，

只需计算$\Delta_g Arg(a_n + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n})$.

因为$|a_n + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n} - a_n| < |a_n|, z \in \partial B(0,R)$，这表明当 z 在g 上绕行时，

$a_n + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n}$始终落在以$a_n$为圆心，以$|a_n|$半径的圆盘内，从而

$\Delta_g Arg(a_n + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_0 z^{-n})$=0.

这样我们得到$\Delta_g ArgP_n(z) = 2np$，故$N = \dfrac{1}{2p} \times 2np = n$

即$P_n(z)$在复平面 £ 内恰有 n 个零点.

5. 利用 Rouche 定理证明代数学基本定理.

证明：设有 n 次多项式 $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$

则存在$R > 0$,使得当$|z| \geq R$时,$|a_n z^n| > |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0|$，

因此$P_n(z)$在$|z| \geq R$上无零点,且当$|z| = R$时,$|P_n(z) - a_n z^n| < |a_n z^n|$，

利用 Rouche 定理知, $P_n(z)$和$a_n z^n$在$|z| < R$内零点个数相同.

故$P_n(z)$在$|z| < R$内有 n 个零点,即$P_n(z)$在 £ 内恰有 n 个零点.

11.求下列全纯函数在$B(0,1)$中的零点个数：

（1） $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$;

解：取 $f(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2, g(z) = -8z$，

故有 1 个零点.

（2） $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8;$

解：取 $f(z) = 2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8,\ g(z) = 8$

故零点个数为 0.

（3） $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2;$

解：取 $f(z) = z^7 - 5z^4 + z^2 - 2,\ g(z) = -5z^4$

故有 4 个零点.

13．设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in B(0,1),\ f(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k} z}$ 证明：

(1) 若 $b \in B(0,1)$，则 $f(z) = b$ 在 $B(0,1)$ 中恰有 n 个根；

(2) 若 $b \in B(\infty,1)$，则 $f(z) = b$ 在 $B(\infty,1)$ 中恰有 n 个根.

证明：（1）当 $|z| = 1$ 时,有 $|f(z)| = \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{a_k - z}{1 - \overline{a}_k z} \right| = 1$

从而 $|b| = |(f(z) - b) - f(z)| < 1 = |f(z)|$，$z \in \partial B(0,1)$，因此由 Rouche 定理，$f(z) - b$ 和

$f(z)$ 在 $B(0,1)$ 中的零点个数相同.

又 $f(z)$在$B(0,1)$ 内有 n 个零点（$a_1, a_2, \cdots, a_n$）

故 $f(z) = b$ 在 $B(0,1)$ 中恰有 n 个根.

（2）记由 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in B(0,1)$ 决定的函数 $\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k} z}$ 为 $f_{[a_1,\cdots,a_n]}(z)$，注意到

$$f(z) = f_{[a_1,\cdots,a_n]}(z) = 1 / f_{[\overline{a_1},\cdots,\overline{a_n}]}\left(\frac{1}{z}\right)$$

由（1）$f_{[\overline{a_1},\cdots,\overline{a_n}]}(z) = \frac{1}{b}$ 在 $B(0,1)$ 中恰有 n 个根，从而 $f_{[\overline{a_1},\cdots,\overline{a_n}]}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{b}$ 在 $B(\infty,1) \subset \mathbb{C}_\infty$ 中恰有 n 个根，即 $f(z) = b$ 在 $B(\infty,1)$ 中恰有 n 个根.

§4.5 习题

1、 设 D 是域，$f_n \in H(D) \cap C(\overline{D}), \forall n \in N$. 证明若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$\partial D$ 上一致收敛，则必在 $\overline{D}$ 上

一致收敛.

证明：$\forall e>0, \exists N \in ¥^*$，当 n>N 时，有 $|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_n(z)|<e$，对 $\forall z\in \partial D, \forall p\in ¥^*$ 成立，从而

$\sup_{z\in\partial D}|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_n(z)|\le e$，由最大模原理知：$\sup_{z\in \bar{D}}|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_n(z)|=\sup_{z\in\partial D}|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_n(z)|\le e$.

2、设 $z_1, z_2 \cdots z_n \in B(\infty,1)$. 证明存在 $z_0\in\partial B(0,1)$, 使得 $\prod_{k=1}^{n}|z_0-z_k|>1$.

证明：（反证法）假设 $\forall z\in\partial B(0,1)$, 都有 $\prod_{k=1}^{n}|z_0-z_k|\le 1$.

令 $f(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$ 则 $f\in H(£)$，

由最大模原理得 $\max_{z\in B(0,1)}|f(z)|\le \max_{z\in\partial B(0,1)}|f(z)|\le 1$ 与 $|f(0)|=\prod_{k=1}^{n}|z_k|>1$ 矛盾. 故存在

$z_0\in\partial B(0,1)$, 使得 $\prod_{k=1}^{n}|z_0-z_k|>1$.

3、设 $f\in H(B(0,R))$. 证明：$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ 是 [0, R) 上的增函数.

证明：设 $0\le r_1<r_2<R$, 最大模原理知：

$$M(r_1)=\max_{|z|=r_1}|f(z)|=\max_{|z|\le r_1}|f(z)|,\quad M(r_2)=\max_{|z|=r_2}|f(z)|=\max_{|z|\le r_2}|f(z)|$$

所以 $\max_{|z|\le r_1}|f(z)|\le\max_{|z|\le r_2}|f(z)|$ ，故 $M(r_2)\ge M(r_1)$

即 $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ 是 [0, R) 上的增函数.

4、设 f 是域 D 上非常数的全纯函数. 证明：若 f 在 D 中没有零点，则 $|f(z)|$ 在 D 内不能取到最小值.

证明：令 $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$，则 $F\in H(D)$，由最大模原理知：$|F(z)|$ 的最大值不能在 D 中取到，

即 $|f(z)|$ 的最小值不能在 D 中取到.

5、 $f\in H(B(0,R))$， $f(B(0,R))\subset B(0,M)$， $f(0)=0$. 证明：

(i) $|f(z)|\le \frac{M}{R}|z|, |f^{'}(0)|\le \frac{M}{R}, \forall z\in B(0,R)\setminus\{0\}$;

(ii) 等号成立当且仅当 $f(z)=\frac{M}{R}e^{iq}z(q\in ¡)$.

证明：(i) 令 $g(z)=\frac{f(Rz)}{M}, g(0)=0, g(B(0,1))\subset B(0,1)$ 从而由 schwarz 引理得

$|g(z)|\le|z|, |g(0)|\le 1$, 故 $\left|\frac{f(Rz)}{M}\right|\le|z|$ 而且 $|f^{'}(0)|=\mathrm{M}\left|g^{'}(0)\cdot\frac{1}{\mathrm{R}}\right|\le\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}$. 即

$|f(z)|\le\frac{M}{R}|z|, |f^{'}(0)|\le\frac{M}{R}, \forall z\in B(0,R)\setminus\{0\}$.

(ii) 等号成立对某个 $z_0\in B(0,R)\setminus\{0\}$ 成立, 当且仅当 $g(z)=ze^{iq}$, 即

$f(z)=M\cdot g(\frac{z}{R})=\frac{M}{R}e^{iq}z, (q\in ¡)$.

6、设 $f\in H(B(0,R))$，$f(0)=0$, 并且存在 A>0, 使得 Re $f(z)\le A$, $\forall z\in B(0,1)$. 证明：

$$|f(z)|\leqslant\frac{2A|z|}{1-|z|}, \forall z\in B(0,1).$$

解：令 $g(z)=\frac{f(z)}{2A-f(z)}$, 则 $g(0)=0$. $|g(z)|=\frac{|f(z)|}{|2A-f(z)|}<1$, 由 schwarz 引理得

$|g(z)|\le|z|$. 即 $\frac{|f(z)|}{|2A-f(z)|}\le|z|$, 于是 $|f(z)|\le|z|\cdot(2A+|f(z)|)$，由此得到

$||f(z)|\le\frac{2A|z|}{1-|z|}|, \forall z\in B(0,1)$..

7、设 $f\in H(B(0,R))$，$f(0)=1$, 并且 Re $f(z)\ge 0$，$\forall z\in B(0,1)$.. 利用 schwarz 引理证明：

(i) $\frac{1-|z|}{1+|z|}\le \mathrm{Re}\, f(z)\le|f(z)|\le\frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad \forall z\in B(0,1)$；

证明：令 $g(z)=\frac{f(z)-1}{f(z)+1}$, 则 $|g(z)|<1$, $g(0)=0$, 由 schwarz 引理得

$|g(z)|\le|z|$, $|g(z)|\ge \mathrm{Re}\, f(z)$. 所以 $\left|\frac{f(z)-1}{f(z)+1}\right|\le|z|$, $|f(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|}$, 又

$\left|\dfrac{f(z)-1}{f(z)+1}\right| \geq \dfrac{1-\operatorname{Re} f(z)}{1+\operatorname{Re} f(z)}$, 所以 $\operatorname{Re} f(z) \geq \dfrac{1-|z|}{1+|z|}$,

故 $\dfrac{1-|z|}{1+|z|} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)| \leq \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$.

8、求出满所有满足条件 “$|f(z)|=1, \forall z \in \partial B(0,1)$" 的整函数.

解: $f \in \{e^{i\theta} z^n : \theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$

由于 f 在 $B(0,1)$ 内最多只有有限个零点, 不妨设 $z_1, z_2 \cdots z_n$ 是 f 在 $B(0,1)$ 内全部的零点, 且它们按重数重复列出.

令 $g(z) = f(z)\prod_{k=1}^{n}\dfrac{1-\overline{z_k}z}{z_k - z}$, 则 $g \in H(\overline{B(0,1)})$ 且 $g(z) \neq 0$, $\forall z \in \overline{B(0,1)}$, $|g(z)|=1$, $\forall z \in \partial B(0,1)$. 于是由最大模原理可得, $|g(z)| \leq 1$, $\forall z \in \overline{B(0,1)}$.

又 $\dfrac{1}{g} \in H(\overline{B(0,1)})$, 故再次应用最大模原理，我们有

$\left|\dfrac{1}{g(z)}\right| \leq \max\limits_{|z|=1}\left|\dfrac{1}{g(z)}\right| = 1, \forall z \in B(0,1)$.

所以 $|g(z)| = 1$, $z \in \overline{B(0,1)}$,

于是 g 只能是常值函数，故存在常数 $\theta \in \mathbb{R}$ $s.t.$ $g(z) = e^{i\theta}$. 因此 $f(z) = e^{i\theta}\prod_{k=1}^{n}\dfrac{z_k - z}{1-\overline{z_k}z}$,

而 f 是整函数，所以 $z_k = 0, (1 \leq k \leq n)$, 这样我们就得到 $f(z) = e^{i\theta} z^n, \theta \in \mathbb{R}$.

9、设 $f \in H(B(0,1))$, $f(B(0,1)) \subset B(0,M)$. 证明: $M|f'(0)| \leq M^2 - |f'(0)|^2$.

证明: 令 $g(z) = \dfrac{f(z)}{M}$, $g(0) = \dfrac{f(0)}{M}$, $g(B(0,1)) \subset B(0,1)$.

由 Schwarz-Pick 引理知 $|g'(0)| \leq 1 - |g(0)|^2$, $\left|\dfrac{f'(0)}{M}\right| \leq 1 - \left|\dfrac{f(0)}{M}\right|^2$,

所以 $M|f'(0)| \leq M^2 - |f'(0)|^2$.

10、设 $f \in H(B(0,1))$, $f(0) = 0$, $f(B(0,1)) \subset B(0,1)$. 证明：若存在 $z_1, z_2 \in B(0,1)$，使

得 $z_1 \neq z_2, |z_1| = |z_2|, f(z_1) = f(z_2)$, 则 $|f(z_1)| = |f(z_2)| \leq |z_1|^2 = |z_2|^2$

（提示：考虑（$\dfrac{f(z_1)-f(z)}{1-f(z)\overline{f(z_1)}})(\dfrac{1-z\overline{z_1}}{z_1-z})(\dfrac{1-z\overline{z_2}}{z_2-z})$.）

11、设 D 是有界区域，$f \in H(D)$，$z_0 \in D$. 证明:若 $f(z_0) = z_0, f(D) \subset D, f'(z_0) = 1,$

则 $f(z) = z$.

证明:不妨设 $z_0 = 0$，f 在 z 的某个领域 $\overline{B(0,r)}$ 展开成泰勒级数: $z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$

若 $f(z) \neq z$，则 $\exists m \geq 2, st. a_m \neq 0, a_k = 0,\ 2 \leq k \leq m-1.$

记 $f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f$（复合 n 次）任取 $N \in \mathbb{N}^*$. 则

$f_N(0) = f_{N-1}(f(0)) = f_{N-1}(0) = \cdots = f(0) = 0.$

故存在 0 的充分小领域 $B(0,r')$，s.t. 在 $B(0,r')$ 上 f_N 有展开式 $f_N(z) = z + Na_m z^m + \cdots$

（只需将 f 的展开式迭代即可得）$\forall z \in B(0,r')$，由全纯函数幂级数展开的唯一性，这个展开式在整个 $\overline{B(0,r)}$ 中成立. 因为 $f_N(D) \subset D$ 有界, 故

$\exists M > 0, s.t.\ |f_N(z)| \leq M. \forall z \in D$. 因此 $|Na_m| = \dfrac{1}{r^m}\left|\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_N(re^{i\theta})e^{-im\theta}d\theta\right| \leq \dfrac{M}{r^m}$，对所有 $N \in \mathbb{N}^*$ 成立，与 $a_m \neq 0$ 矛盾.

第 5 章 全纯函数的 Laurent 展开及其应用

§5.1 习题

1、 下列初等函数能否在指定的域 D 上展开成 Laurent 级数?

（i） $f(z)=\cos\frac{1}{z}, D=B(0,\infty)\setminus\{0\};$

解：因为 $f\in H(D)$，故 f 在 D 上可以展开成 Laurent 级数.

2、 将下列初等函数在指定的域 D 上展开成 Laurent 级数：

（i） $\frac{1}{z^2(z-1)}, D=B(1,1)\setminus\{1\};$

解：$\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{(z-1+1)^2(z-1)}=\frac{1}{(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}C_{-2}^{n}(z-1)^n$.

（ii） $\frac{1}{(z-1)(z-2)}, D=B(0,2)\setminus\overline{B(0,1)};$

解：当 $z\in$ D 时，由于 $1<|z|<2$，

所以 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{(z-2)}-\frac{1}{(z-1)}=-\frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{z}{2}})-\frac{1}{z}(\frac{1}{1-\frac{1}{z}})=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$.

（iii） $\frac{1}{(z-5)^n}, n\in ¥, D=B(1,\infty)\setminus\{1\};$

解：$\frac{1}{(z-5)^n}=\frac{1}{z^n}\frac{1}{(1-\frac{5}{z})^n}=\frac{1}{z^n}\sum_{m=0}C_{-n}^{m}(-\frac{5}{z})^m$.

3、 设 $0<r<R<\infty, D=\overline{B(0,R)}\setminus\overline{B(0,r)}$. 证明：若 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z_n$ 双全纯地将 D 映为域 G, 则 G 的面积为 $p\sum_{n=-\infty}^{\infty}n|a_n|^2(R^{2n}-r^{2n})$.

证明：S(G)$=\iint_D|f'(z)|^2dxdy=\iint_D f'(z)\overline{f'(z)}dxdy=\int_r^R rdr\int_0^{2p}f'(re^{iq})\overline{f'(re^{iq})}dq$，

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n,\ f^{'}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}na_nz^{n-1},$$

$$S(G)=\int_r^R rdr\int_0^{2p}\sum_{n=-\infty}^{\infty}na_nr^{n-1}e^{inq}\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\overline{a_n}r^{n-1}e^{-i(n-1)q}dq$$

$$=\int_r^R rdr2p\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2|a_n|^2r^{2n-2}=2p\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2n^2\int_r^R r^{2n-1}dr$$

$$=2p\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2n^2\frac{1}{2n}r^{2n}\Big|_r^R=p\sum_{n=-\infty}^{\infty}n|a_n|^2(R^{2n}-r^{2n}).$$

§5.2 习题

1、是否存在 $\overline{B(0,1)}\backslash\{0\}$ 上的无界全纯函数 f，使得 $\lim\limits_{z\to 0}zf(z)=0$？

解：g（z）$=\begin{cases}zf(z),z\in\overline{B(0,1)}\backslash\{0\}\\0,z=0\end{cases}$,假设 f 在 $\overline{B(0,1)}\backslash\{0\}$ 上无界全纯,则 g 在 $B(0,1)$ 上全纯，$\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{g(z)}{z}=g'(0)$,从而 0 是 f 的可去奇点，f 有界,矛盾.

2、证明：若 z_0 是全纯函数 f： $B(z_0,r)\backslash\{z_0\}\to$ £$\backslash\{0\}$ 的本性奇点，则 z_0 也是 $\frac{1}{f(z)}$ 的本性奇点.

证明:(反证法)假设 z_0 不是 $\frac{1}{f(z)}$ 的本性奇点,

若 z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的极点,则 $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=\infty$,得到 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=0$ 与 z_0 是 f 的本性奇点矛盾；若 z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的可去奇点,则 $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=a$,得到 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\frac{1}{a}$ 与 z_0 是 f 的本性奇点矛盾,

故假设不成立,即结论成立.

§5.4 习题

1．证明：留数定理与 Cauchy 积分公式等价.

提示：留数定理 $\Rightarrow$ Cauchy 积分公式

$$\frac{1}{2pi}\int_{\partial D}\frac{f(x)}{x-z}dx=\mathrm{Res}\left(\frac{f(x)}{x-z},z\right)=f(z)$$

$$\frac{n!}{2pi}\int_{\partial D}\frac{f(x)}{(x-z)^{n+1}}dx=\mathrm{Res}\left(\frac{n!f(x)}{(x-z)^{n+1}},z\right)=f^{(n)}(z)$$

8、指出下列初等函数在 C_∞ 中的全部孤立奇点，并求出这些初等函数在它们各自孤立奇点处的留数：

（i）$\dfrac{1}{z^3-z^5}$

孤立奇点 0，±1.其中 0 是 3 阶极点，1 是 1 阶极点，-1 是 1 阶极点.

$$\operatorname{Re}s(f,0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[z^3\cdot\frac{1}{z^3-z^5}\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{1-z^2}\right]=\frac{1}{2!}$$

$$\operatorname{Re}s(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{1}{z^3-z^5}=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{1}{z^3(1-z^2)}=-\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Re}s(f,-1)=\lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{1}{z^3-z^5}=-\frac{1}{2}$$