Lec1 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 7 日

Part I

复数与复变函数

$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$。

$z = a + ib,\ a := \mathrm{Re}z,\ b = \mathrm{Im}z,\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ \overline{z} := a - ib,\ z\overline{z} = |z|^2$。

定理 1.1. *(1)* $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ \mathrm{Im} = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$。

(2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w},\ \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$。

(3) $|zw| = |z| \cdot |w|,\ |\overline{z}| = |z|$。

(4) $|z + w| \le |z| + |w|$，等号成立 $\Leftrightarrow\ \exists\, t \ge 0\ s.t.\ z = tw$ 或 $w = tz$。

证明. 对 (4)，

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \le |z|^2 + |w|^2 + 2|zw| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

等号成立 $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z\overline{w}) = |z\overline{w}| \Leftrightarrow \exists\, t \ge 0\ s.t.\ z\overline{w} = t'$。

不妨设 $w \ne 0$，则 $z \cdot \overline{w} \cdot w = t'w \Rightarrow z = \frac{t'}{|w|^2}w$。 □

例 1.1. 设 $|a| < 1$，$|z| < 1$，证明 $\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1$。

证明. $|z - a|^2 = (z - a)(\overline{z} - \overline{a}) = |z|^2 + |a|^2 - (a\overline{z} + \overline{a}z)$。

$|1 - \overline{a}z|^2 = (1 - \overline{a}z)(1 - a\overline{z}) = 1 + |a|^2 \cdot |z|^2 - (a\overline{z} + \overline{a}z)$。

于是 $|z - a|^2 - |1 - \overline{a}z|^2 = (|z|^2 - 1)(1 - |a|^2) < 0$。 □

复数的几何表示

复数	$\longleftrightarrow$	平面中的点	$\longleftrightarrow$	平面向量
$a + ib$		(a, b)		$\overrightarrow{OP}$

复数的加法对应向量的加法。

设 $z=a+ib\neq 0$, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=r$，$\exists\,\theta\ s.t.\ z=r(\frac{a}{r}+i\frac{b}{r})=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\theta$ 称之为 z 的一个**辐角**。

$\mathrm{Arg}(z)=\{\theta+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ 为 z 的所有的辐角，$\arg z\in(-\pi,\pi]$ 称为辐角的主值[1]。$\arg z$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 中非连续。

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$,

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)] \\ &= r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)). \end{aligned}$$

用复数 w 去乘复数 z，相当于将 z 逆时针旋转 $\arg w$，再把 z 的模长伸长 $|w|$ 倍。

由 $\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\overline{w}}{|w|^2}$，$\arg\frac{z}{w}$ 为 z,w 的夹角。

例 1.2. z_1,z_2 平行 $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z_1\cdot\overline{z_2})=0$。

证明.

$$\begin{aligned} z_1,z_2\text{平行} &\Leftrightarrow \arg\frac{z_1}{z_2}=0\text{或}\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}=t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z_1\overline{z_2}=t|z_2|^2 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z_1\overline{z_2})=0. \end{aligned}$$

□

例 1.3. (1) $\triangle z_1z_2z_3$ 与 $\triangle w_1w_2w_3$ 相似 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}=0$。

(2) z_1,z_2,z_3 共线 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}=0$。

扩充复平面

$\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，$\infty$ 称为无穷远点。

$z\pm\infty$, $z\cdot\infty=\infty\ (z\neq 0)$, $\frac{z}{\infty}=0$, $\frac{z}{0}=\infty\ (z\neq 0)$。($0\cdot\infty$, $\infty\pm\infty$ 无定义。)

设 S^2 为单位球面，$\mathbb{C}\to S^2\setminus\{N\}$ 一一对应，$\mathbb{C}_\infty\to S^2$ 一一对应。

复平面的拓扑

度量可以诱导拓扑，$\mathbb{C}$ 中的度量 $d(z,w)=|z-w|$。$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0 :\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|z_n-z_0|=0$。

[1]也可以定义 $\arg z\in[0,2\pi)$。

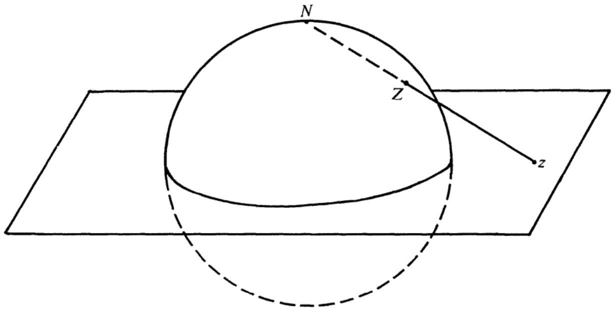


图 1: 球极投影

定义 1.1. $U \subset \mathbb{C}$ 称为**开集**，如果对 $\forall\, z \in U$, $\exists\, \varepsilon > 0\; s.t.$

$$B(z,\varepsilon) := \{w \mid |w-z| < \varepsilon\} \subset U.$$

如果 W^C 为开集，则称 W 为**闭集**。

z_0 称为 $E \subset \mathbb{C}$ 的**聚点**，如果对 $\forall\, \varepsilon > 0$, $B(z_0,\varepsilon) \cap (E \setminus \{z_0\}) \neq \varnothing$。

$E \cup \{E\text{的聚点}\} = \overline{E}$ 称为 E 的**闭包**。易见 $\overline{E} = \bigcap_{F \supset E,\ F\text{为闭集}} F$；$E$ 为闭集 $\Leftrightarrow E = \overline{E}$。

$(\mathbb{C}, d)$ 的完备性：

(1) $\mathbb{C}$ 中的 Cauchy 列收敛。

(2) 有界点列有收敛子列。

(3) 有界无穷点集必有聚点。

(4) 闭集套定理。

(5) 有界闭集的任意开覆盖有有限子覆盖。

定义 1.2. $E \subset \mathbb{C}$ 称为**紧致集**，如果 E 的任何开覆盖有有限子覆盖。$E \subset \mathbb{C} \Leftrightarrow E$ 为有界闭集[2]。

定理 1.2. 设 $E \subset \mathbb{C}$ 为紧集，$F \subset \mathbb{C}$ 为闭集，$E \cap F = \varnothing$，则

$$d(E,F) = \inf\{d(z,w) \mid z \in E, w \in F\} > 0.$$

证明. $\forall\, a \in E$, $\varepsilon_a = \frac{1}{2}(a,F) > 0$，则 $\{B(a,\varepsilon_a) \mid a \in E\}$ 为 E 的开覆盖 $\Rightarrow$ 有有限子覆盖 $B(a_i,\varepsilon_{a_i})$, $1 \le i \le n$。

取 $\delta = \min\{\varepsilon_{a_i} \mid 1 \le i \le n\}$，可以证明 $d(E,F) \ge \delta > 0$。 □

[2]一般度量空间不成立。

Lec2 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 9 日

定义 0.1. $E \subset \mathbb{C}$ 称为**连通的**，如果 E 可以表示为两个非空不相交集合 E_1, E_2 的并，则 $\overline{E_1} \cap E_2 \neq \varnothing$ 或 $E_1 \cap \overline{E_2} \neq \varnothing$。

定理 0.1. 开集 E 连通 $\Leftrightarrow$ E 不能表示为两个非空不相交开集的并。

证明. "$\Rightarrow$"：若存在非空不相交开集 E_1, E_2 使得 $E = E_1 \cup E_2 \Rightarrow E_1 \subset E_2^C$（闭集）$\Rightarrow \overline{E_1} \subset E_2^C \Rightarrow \overline{E_1} \cap E_2 = \varnothing$，同理 $E_1 \cap \overline{E_2} = \varnothing$，矛盾。

"$\Leftarrow$"：假设 E 不连通，则存在非空不交集合 E_1, E_2 使得 $E = E_1 \cup E_2$ 且 $\overline{E_1} \cap E_2 = \varnothing$，$E_1 \cap \overline{E_2} = \varnothing$。$\forall\, z \in E_1 \subset E \Rightarrow \exists\, \varepsilon_1 > 0\ s.t.\ B(z, \varepsilon_1) \subset E$。因为 z 不是 E_2 的聚点，$\exists\, \varepsilon_2 > 0\ s.t.\ B(z, \varepsilon_2) \cap E_2 = \varnothing$。取 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$，$B(z, \varepsilon) \subset E_1 \Rightarrow E_1$ 开集，同理 E_2 为开集。矛盾。 $\square$

定义 0.2. 设 $E \subset \mathbb{C}$，如果对 $\forall\, z_1, z_2 \in E$，存在连续映射 $\gamma\colon [0,1] \to E\ s.t.\ \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2$，则称 E 为**道路连通的**。

定理 0.2. 设 $E \subset \mathbb{C}$ 为开集，则 E 道路连通 $\Leftrightarrow$ E 连通。

证明. "$\Leftarrow$"：设 E 连通，取定 $a \in E$，定义 $E_1 = \{z \in E \mid \text{存在连接}a\text{和}z\text{的道路}\}$，$E_2 = \{z \in E \mid \text{不存在连接}a\text{和}z\text{的道路}\}$。则 $E = E_1 \cup E_2$，E_1, E_2 都是开集，由前一定理 $E_1 = \varnothing$ 或 $E_2 = \varnothing$，显然 $E_1 \neq \varnothing$，故 $E_2 = \varnothing$。

"$\Rightarrow$"：假设 E 不连通，则存在非空不交开集 $E_1, E_2\ s.t.\ E = E_1 \cup E_2$，任取 $z_1 \in E_1$，$z_2 \in E_2$，则存在道路 $\gamma\colon [0,1] \to E$，$\gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2$。令 $A = \{t \in [0,1] \mid \gamma(s) \in E_1,\ 0 \leq s < t\}$，则 $A \neq \varnothing$，令 $t^* = \sup A$，$\gamma(t^*) \in E_1 \cup E_2$，若 $\gamma(t^*) \in E_1$，由于 E_1 为开集，$\exists\, \delta > 0,\ s.t.\ t^* + \delta \in A$，矛盾。若 $\gamma(t^*) \in E_2$，类似。 $\square$

但一般而言，道路连通必然连通，但连通未必道路连通，下面是一个经典的例子，称为**拓扑学家的正弦曲线 (Topologist's sine curve)**。

例 0.1. 考虑 $E = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x < 1\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$，则 E 是连通的，但不道路连通。

评论. 一般地，如果 E 连通，则 $\overline{E}$ 也连通。（习题）

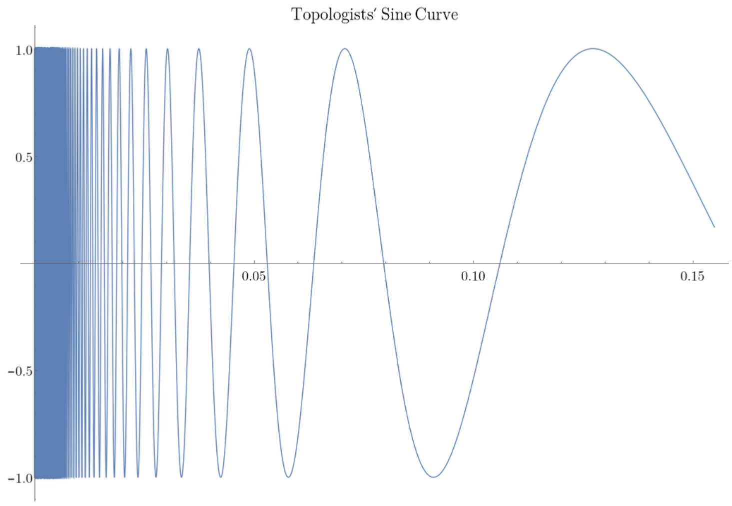


图 1: 拓扑学家的正弦曲线

我们称 γ 为**可求长曲线**，若设 π 是 $[0,1]$ 的分割，则 $\sup\limits_{\pi}\sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|<+\infty$。设 $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$，则 $\gamma'(t)=x'(t)+iy'(t)$。那么 γ 为可求长曲线 $\Leftrightarrow$ $x(t),y(t)$ 为有界变差函数。

如果 $x(t),y(t)$ 为 C^1 函数且 $\gamma'(t)\neq 0$，则称 γ 为**光滑曲线**，此时 γ 的长度 $|\gamma|=\int_0^1|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}\,t=\int_0^1\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}\,t$。

定义 0.3. 非空的连通开集称为**区域**。

定理 0.3. ***(Jordan* 分割定理)**：一条简单闭曲线 γ 把复平面分成两个区域，一个是有界的，称为 γ 的内部，另一个是无界的，称为 γ 的外部。

评论. 该定理的证明较为复杂，我们这里不加证明地承认它。

定义 0.4. 区域 D 称为**单连通**，如果 D 中的任意简单闭曲线的内部仍在 D 中。

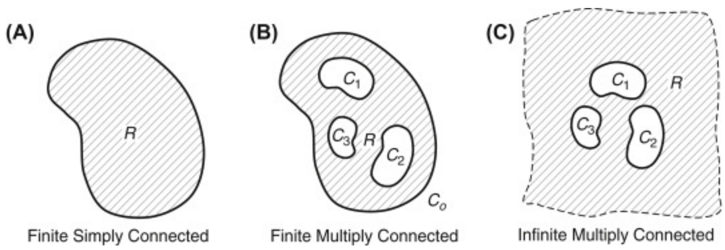


图 2: 连通的情形

Part II

全纯函数

设 $D \subset \mathbb{C}$ 为区域，$f\colon D \to \mathbb{C}$ 为映射，f 的表示：

$$f(z) = f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y).$$

1 复变函数的导数

定义 1.1. 设 $f\colon D \to \mathbb{C}$，$z_0 \in D$，如果

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在，则称 f 在 z_0 处**可导**。

如果 $\exists\, A \in \mathbb{C}$，$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(|\Delta z|)$，$|\Delta z| \to 0$，则称 f 在 z_0 处**可微**。

定理 1.1. *f 在 z_0 处可导 $\Leftrightarrow$ f 在 z_0 处可微，且 $A = f'(z_0)$。*

评论. f 在 z_0 处可微 $\Rightarrow$ f 在 z_0 处连续。

反之不然，例如 $f(z) = \overline{z}$，则 $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \overline{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$，极限不存在。

定义 1.2. 若 f 在区域 D 中每点处都可导，则称 f 在 D 上**全纯 (Holomorphic)** 或**解析 (Analytic)**。

评论. 称 f 在 z_0 处全纯，如果 f 在 z_0 的某个邻域中全纯。

2 Cauchy-Riemann 方程

定义 2.1. 设 $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$，$z_0 = x_0 + iy_0 \in D$，若 $U(x,y), V(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微，则称 f 在 z_0 处**实可微**。

进一步分析函数的结构，

$$\begin{aligned}
f(z_0+\Delta z)-f(z_0) &= (U(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-U(x_0,y_0))+i\,(V(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-V(x_0,y_0)) \\
&= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial V}{\partial y}\Delta y\right)+o(|\Delta z|) \\
&= \left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial U}{\partial y}+i\frac{\partial V}{\partial y}\right)\Delta y+o(|\Delta z|) \\
&=: \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(|\Delta z|) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\Delta z+\overline{\Delta z}\right)+\frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\Delta z-\overline{\Delta z}\right)+o(|\Delta z|) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)f\cdot\Delta z+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)f\cdot\overline{\Delta z}+o(|\Delta z|) \\
&=: \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{\Delta z}+o(|z|).
\end{aligned}$$

定理 2.1. f 在 z_0 处可微 $\Leftrightarrow$ f 在 z_0 处实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)=0$。

当 f 可微时，$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}$。

评论. 我们解释一下为什么会出现 $\overline{z}$。

$f(z)=f(x+iy)$ 可以看成 x,y 及 $z,\overline{z}$ 的函数。$f(x,y)=f(\frac{z+\overline{z}}{2},\frac{z-\overline{z}}{2i})$，$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{1}{2i}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})f$，对 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ 也有类似的结果。

要使 f 可微，则

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(U+iV)}{\partial x}+i\frac{\partial(U+iV)}{\partial v}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}U_x=V_y,\\ U_y=-V_x.\end{cases}$$

称为 **Cauchy-Riemann 方程**。进而

$$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(U+iV)}{\partial x}-i\frac{\partial(U+iV)}{\partial y}\right)=U_x+iV_x.$$

Lec3 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 14 日

例 2.1. (1) $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}$, 同样地, 若将 $f(z)$ 视作 $f(z,\overline{z})$, g 视作 $g(z,\overline{z})$, 那么 $(g\circ f)(z,\overline{z}) = g(f(z,\overline{z}),\overline{f(z,\overline{z})})$。

(2) $\frac{\partial}{\partial z}(g\circ f)(z) = \frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\cdot\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(g\circ f)(z) = \frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\cdot\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$。

注意到我们也可以将 f 如下表示：

$$f(z) = f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y).$$

那么 f 全纯则应当满足 C-R 方程 $\begin{cases} U_x = V_y, \\ U_y = -V_x \end{cases}$ 。

例 2.2. 设 $f\colon D\to\mathbb{C}$ 全纯且 $\forall\, z\in D$, $f'(z)=0$，则 $f=$ 常数。

证明.

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \cdots = U_x + iV_x = 0$$

$$\Rightarrow U_x\equiv 0,\ V_x\equiv 0 \Rightarrow U_y\equiv 0,\ V_y\equiv 0 \Rightarrow U,V = \text{const}.$$

□

例 2.3. 设 $f\colon D\to\mathbb{C}$ 全纯且 $|f| =$ 常数，则 f 为常数。

证明. 不妨考虑常数不为零的情况 (否则平凡),

$$\begin{aligned} &U^2+V^2 = c\neq 0 \\ \Rightarrow &\begin{cases} 2U\cdot U_x + 2V\cdot V_x = 0, \\ 2U\cdot U_y + 2V\cdot V_y = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow &(U^2+V^2)U_x = 0 \\ \Rightarrow &U_x\equiv 0. \end{aligned}$$

类似地，$V_x\equiv 0,\ U_y\equiv 0,\ V_y\equiv 0$。从而 f 为常数。 □

记

$$\begin{aligned} C^k(D) &= \{f\colon D\to\mathbb{C}\mid U(x,y),V(x,y)\in C^k(D)\},\ (k=0,1,\cdots,\infty) \\ H(D) &= \{f\colon D\to\mathbb{C}\mid f\text{在}D\text{上全纯}\} \end{aligned}$$

评论. 由于 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，则 $f(z)$ 也可以视作 r, θ 的函数：$f(z) = U(r,\theta) + iV(r,\theta)$。于是可以得到

$$f(z)\text{全纯} \Leftrightarrow \begin{cases} U_r = \frac{1}{r}V_\theta, \\ V_r = -\frac{1}{r}U_\theta. \end{cases}$$

同样你也可以认为 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$，那么

$$f(z) = U(x,y) + iV(x,y) = U(r\cos\theta, r\sin\theta) + iV(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$U_r = U_x \cdot \cos\theta + U_y \cdot \sin\theta,\ U_\theta = U_x \cdot (-r\sin\theta) + U_y \cdot r\cos\theta,$$
$$V_r = V_x \cdot \cos\theta + V_y \cdot \sin\theta,\ V_\theta = V_x \cdot (-r\sin\theta) + V_y \cdot r\cos\theta.$$

于是我们推断

$$f(z)\text{全纯} \Leftrightarrow \begin{cases} U_x = V_y, \\ U_y = -V_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_r = \frac{1}{r}V_\theta, \\ V_r = -\frac{1}{r}U_\theta \end{cases}.$$

定理 2.2. 设 $f = U + iV \in H(D)$ 且 $U, V \in C^2(D)$，则 U, V 为调和函数。

证明.

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = (V_y)_x + (-V_x)_y = 0$$

类似有 $\Delta V = 0$。 □

定义 2.2. 设 U, V 为区域 D 上的调和函数。若 $U + iV \in H(D)$，则称 V 为 U 的**共轭调和函数**。

评论. 注意，$U + iV \in H(D)$ 和 $V + iU \in H(D)$ 并不等价。

定理 2.3. *(*)*[1]设 U 为单连通区域 D 上的调和函数，则 U 存在共轭调和函数。

证明. 欲构造 $V(x,y)\ s.t.\ V_x = -U_y$, $V_y = U_x$。

令

$$V(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -U_y \,\mathrm{d}\,x + U_x \,\mathrm{d}\,y.$$

首先我们要说明这个记号是有意义的。

$$\begin{aligned} \oint_L -U_y \,\mathrm{d}\,x + U_x \,\mathrm{d}\,y &\overset{Green}{=} \iint \mathrm{d}(-U_y \,\mathrm{d}\,x + U_x \,\mathrm{d}\,y) \\ &= \iint (-U_{yy}) \,\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,x + U_{xx} \,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y \\ &= \iint (U_{yy} + U_{xx}) \,\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y \\ &= 0. \end{aligned}$$

[1]打星号表示很重要。

所以 $V(x,y)$ 是良定义的 (不依赖于路径选取)。于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \lim_{h\to 0}\frac{V(x+h,y)-V(x,y)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_L -U_y\,\mathrm{d}\,x+U_x\,\mathrm{d}\,y}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} -U_y\,\mathrm{d}\,x}{h} = -U_y(x,y).\end{aligned}$$

同理 $\frac{\partial V}{\partial y}=U_x$。 □

定理 2.4. 设 $U\in C^2(D)$，$U=U(x,y)=U(z,\overline{z})$，则 $\Delta U=4\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\overline{z}}$。

证明.

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial\overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial U^2}{\partial z\partial\overline{z}} &= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right)-i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]\\ &= \frac{1}{4}\Delta U.\end{aligned}$$

□

例 2.4. D 为区域，$f\colon D\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 全纯，证明 $\log|f(z)|$[2]在 D 上为调和函数。

证明.

$$\begin{aligned}\Delta\log|f(z)| &= 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}\log|f(z)|,\\ \frac{\partial}{\partial z}\log|f(z)| &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\log(f\cdot\overline{f}) = \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial f}{\partial z}\overline{f}+f\frac{\partial\overline{f}}{\partial z}}{f\cdot\overline{f}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{f},\\ \frac{\partial^2}{\partial\overline{z}\partial z}\log|f(z)| &= \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial\overline{z}\partial z}f-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}}{f^2} = 0.\end{aligned}$$

□

例 2.5. 设 $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$(非单连通)，$U(z)=\log|z|$，则 $U(z)$ 调和，但是不存在 u 的共轭调和函数。

证明. 用反证法。假设 $\exists\, V\ s.t.\ f=U+iV$ 全纯。令 $g(z)=\log|z|+i\arg z,\ z\in D'=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\subset D$，则 $g(z)$ 在 D' 中全纯。

于是 $f(z)-g(z)$ 在 D' 上全纯，且 $\mathrm{Re}(f(z)-g(z))\equiv 0\Rightarrow f(z)-g(z)=$ 常数 $=c$。故 $f(z)=\log|z|+i\arg z+c,\ z\in D'$。那么

$$f(-1)=\lim_{y\to 0^+}f(-1+iy)=i\pi+c.$$

但另一方面，也应该有

$$f(-1)=\lim_{y\to 0^+}f(-1-iy)=-i\pi+c.$$

故矛盾。 □

[2]这里的 log 就是自然对数 ln。

Lec3 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 21 日

3 导数的几何意义

我们考虑复平面上的一段曲线 $\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{C}$，那么 $\gamma'(t)\mathrm{d}t$ 代表着曲线在 t 处的切向量。若有一全纯函数 f 作用在曲线上，得到一段新的曲线 $f\circ\gamma\colon [0,1]\to\mathbb{C}$，那么其在 t 处的切向量为：

$$(f\circ\gamma(t))'\mathrm{d}t = f'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

观察等式右端，$\gamma'(t)\mathrm{d}t$ 为原曲线在 t 处的切向量，而 $f'(\gamma(t))$ 可以认为是向量前后变化的复数倍率，即一方面使得向量逆时针旋转 $\arg f'(\gamma(t))$ 的角度，另一方面使得向量放缩 $|f'(\gamma(t))|$ 的倍率。

进而我们可以预测，如果有两条曲线 $\gamma_1(t),\gamma_2(t)$ 在 t 处相交，切向量在 t 处有一夹角 $\angle A$。那么在全纯函数 f 的作用下，新的曲线 $f\circ\gamma_1(t), f\circ\gamma_2(t)$ 在 t 处的切向量夹角为 $\angle B$，于是应该有

$$\angle A = \angle B.$$

这称为全纯函数的**保角性**。进而一个微三角形在变化前后应当相似，这称为**共形性**。

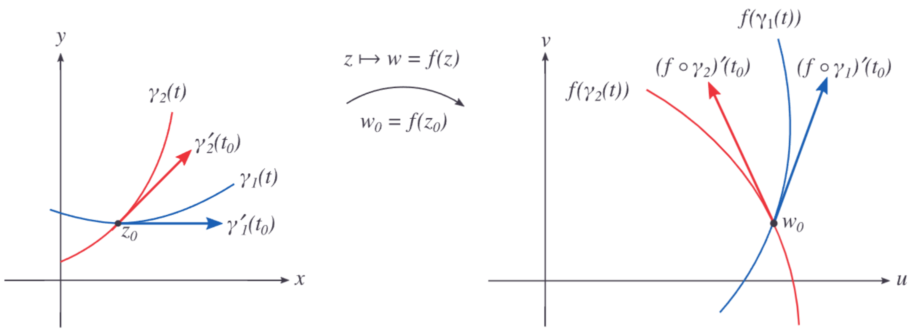


图 1: 全纯映射将一点处的所有切向量旋转放缩相同的倍率

下面是一个例子。

例 3.1. 考虑 $u+iv=w=f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$。

则在 uv 平面中一条竖直的线，对应 xy 平面中的双曲线。水平的线亦对应双曲线。且交点处的正交性被保持。

设 $w = f(z) = u + iv$，则

$$\mathcal{J}f = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2.$$

为面积的伸缩比。若 $f\colon D \to \Omega$ 为全纯双射，则

$$\mathrm{Area}(\Omega) = \iint_D |f'(z)|^2 \cdot \mathrm{d}\,\sigma.$$

例 3.2. (P50.3)$f\colon B(0,1) \cup \{1\}$ 全纯，$f(B(0,1)) \subset B(0,1)$，$f(1) = 1$。证明：$f'(1) \geq 0$。

证明. 从几何的角度看，考虑在 1 处取一个更小的内切圆，圆弧在 1 处的切向量竖直。设 $\theta = \arg f'(1) > 0$，那么我们考虑从内切圆下半圆弧趋近 1，此时切向量被逆时针旋转 θ 角而进入圆的内部，意味着圆弧必然被映射到 $B(0,1)$ 外，这与题意矛盾。类似地，若 $\arg f'(1) < 0$，则从上半圆弧趋近之，同样导出矛盾。

于是 $f'(1)$ 是实数，若 $f'(1) < 0$，则考虑从实轴上趋于 1 的一条曲线，其切向量被映为指向实轴负向的向量，与上面的矛盾类似。从而 $f'(1) \geq 0$。 □

4 初等函数

4.1 指数函数

设 $z = x + iy$，则

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y).$$

此时 $U(x,y) = e^x \cos y$, $V(x,y) = e^x \sin y$，满足 C-R 方程。

(1) $(e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$;

(2) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$;

(3) $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$;

(4) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

也可定义 $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$，则更为严谨，此时上面的性质均为计算验证。

注意到

$$\begin{aligned} e^{z_1} = e^{z_2} &\Leftrightarrow \mathrm{Re}z_1 = \mathrm{Re}z_2,\ \mathrm{Im}z_1 = \mathrm{Im}z_2 + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

于是我们只需在 $\mathbb{C}$ 的一个条带状区域上观察 e^z 的行为，将带形区域映为扇形区域：

定义 4.1. 设 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ 全纯，如果在 $D \subset \Omega$ 且 $f|_D$ 是单射，则称 $f|_D$ 为**单叶全纯的 (Univalent)**，D 称为 f 的一个**单叶性域**。

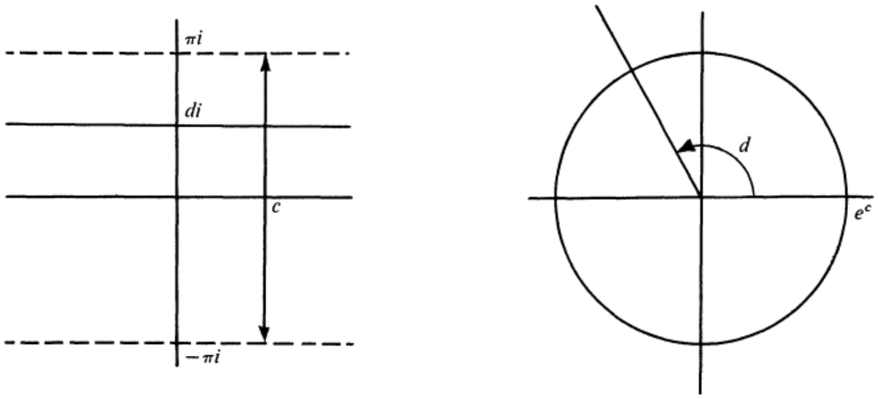


图 2: e^z 的作用

4.2 对数函数

设 $z \neq 0$，若 $e^w = z$，则称 w 为 z 的指数，记为 $\mathrm{Log} z$。

注意，$\mathrm{Log} z$ 是多值函数：$z = re^{i\theta}$, $w = x + iy \Rightarrow \begin{cases} e^x = r, \\ y = \theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$。从而我们可以给出 $\mathrm{Log} z$ 的表达式：

$$\mathrm{Log} z = \log|z| + i\theta + 2k\pi i \, (\theta = \arg z \in (-\pi, \pi]), \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

固定 $k \in \mathbb{Z}$，$w_k(z) = \log|z| + i\theta + 2k\pi i$。虽然在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 中有定义，但是它在 $(-\infty, 0)$ 上不连续。然而在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上它是全纯的。

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \ \frac{\partial V}{\partial r} = 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

多值函数的支点 当 z 绕某点一周时，多值函数 (为保持连续性) 回不到初始值，该点称为**支点**。

例如，$0, \infty$ 为 $\mathrm{Log} z$ 的支点。

评论. 可以证明：若 $D \in \mathbb{C}$ 为单连通区域，且 $0 \notin D$。则存在全纯函数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ 满足 $e^{f(z)} = z$，即在 D 中 $\mathrm{Log} z$ 有单值分支。

Lec3 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 21 日

我们回忆复数绕 $\mathrm{Log}z$ 的支点旋转一周时，其值无法回到初始值。为了避免这种旋转发生，我们将支点连接，称为**割线**。

考虑 $\mathrm{Log}z$ 的单值分支时，我们将其记为 $\log z$。

例 4.1. 考虑函数 $f(z)=\log(z-a)+\log(z-b)=\log|z-a|+\log|z-b|+i(\theta_1-\theta_2)+i\cdot 2k\pi$, $(a\neq b)$，那么 a,b 为支点，∞ 不是支点。

对于函数 $f(z)=\log(z-a)+\log(z-b)-\log(z-c)$，支点为 a,b,c,∞。

4.3 幂函数

考虑 $f(z)=z^\mu$, $\mu=a+ib\in\mathbb{C}$。这里定义

$$z^\mu=e^{\mu\log z}=e^{\mu(\log|z|+i\theta+i\cdot 2k\pi)}=e^{\mu\log|z|}\cdot e^{i\cdot\mu\theta}\cdot e^{i\cdot\mu\cdot 2k\pi}.$$

(1) 若 $\mu=n\in\mathbb{Z}^+$，此时函数是单值的。将辐角增大 n 倍，模变为原来的 n 次方。

(2) 若 $\mu=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{Z}^+$，则 $z^{\frac{1}{n}}$ 为 $n-$ 值函数。

$$z^{\frac{1}{n}}=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ (k=0,1,\cdots,n-1)$$

当 $k=0$ 时，$z^{\frac{1}{n}}$ 称为**主支**，记为 $\sqrt[n]{z}$。

(3) 一般情况下，$\mu=a+ib$，则

$$\begin{aligned}z^\mu&=e^{\mu\log z}=e^{(a+ib)(\log|z|+i\theta+i\cdot 2k\pi)}\\&=e^{a\log|z|-b(\theta+2k\pi)}e^{i(b\log|z|+a\theta+2k\pi a)}.\end{aligned}$$

1° 若 $b=0$, $a=n\in\mathbb{Z}$，是单值的。

2° 若 $b=0$, $a=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$，为 $q-$ 值的。

3° 若 $b=0$, $a\notin\mathbb{Q}$，则函数有无穷多值。

4° $b\neq 0$，函数有无穷多值。

例 4.2. $i^i=e^{i\log i}=e^{i[\log|i|+(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i]}=e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$, $(k\in\mathbb{Z})$。

例 4.3. 设 $f(z)=\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}\cdot(z+1)^{-1}$，设 f 在 $[0,1]$ 的上岸取正值的单值全纯分支为 f_0，计算 $f_0(-i)$。

解.
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+1} \cdot e^{\frac{3}{2}\mathrm{Log}(1-z)-\frac{1}{2}\mathrm{Log}z} \\ &= \frac{1}{z+1} \cdot e^{\frac{3}{2}\log|1-z|-\frac{1}{2}\log|z|+i(\frac{3}{2}\mathrm{Arg}(1-z)-\frac{1}{2}\mathrm{Arg}z)}. \end{aligned}$$
记 $g(z) = i(\frac{3}{2}\mathrm{Arg}(1-z) - \frac{1}{2}\mathrm{Arg}z)$，当 z 绕 0 一周时，$g(z)$ 的值域增加 $-\pi i$，故 $z=0$ 为支点。

z 绕 $z=1$ 一周时，$g(z)$ 增加 $i \times \frac{3}{2} \times 2\pi = 3\pi i$，$z=1$ 为支点。

z 绕 ∞ 一周时，$g(z)$ 增加 $3\pi i - \pi i = 2\pi i$，而 $e^{2\pi i}=1$，故 ∞ 不是支点。

当 z 位于 $[0,1]$ 上岸时，取 $\mathrm{Arg}(z)=0$，$\mathrm{Arg}(1-z)=0$，当 $z=-i$ 时，$\mathrm{Arg}z = \frac{3\pi}{2}$，$\mathrm{Arg}(1-z)=\frac{\pi}{4}$。
$$f_0(-i) = \frac{1}{-i+1} \cdot e^{\frac{3}{2}\log|1+i|-\frac{1}{2}\log|-i|+i(\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}\log 2-\frac{1}{8}\pi}.$$
□

4.4 三角函数

定义：
$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}),\ \tan z = \frac{\sin z}{\cos z},$$
$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}),\ \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$
有

(1) $\sin z, \cos z$ 为**整函数** (在 $\mathbb{C}$ 上全纯)。

(2) $\sin z, \cos z$ 以 2π 为周期。

(3) $\cos(-z) = \cos z$，$\sin(-z) = -\sin z$。

(4) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$，$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$。

(5) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$，$\sin 2z = 2\sin z \cos z$。

(6) $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$，$(k\in\mathbb{Z})$，$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi + \frac{\pi}{2}$，$(k\in\mathbb{Z})$。

(7) $\sin z$，$\cos z$ 是无界函数。

例 4.4. 求一保角变换，将除去线段 $\{z = a+iy \mid 0<y<h\}$ 的上半平面变为上半平面。

解. 依次施加 $z-a$，z^2，$z+h^2$，$\sqrt{z}$ 的操作即可。此时空线段先被向左平移到虚轴上，然后被旋转到负实轴上，再被向右平移到正实轴上，最后左右张开。 □

例 4.5. 求带状区域 $\{x+iy \mid x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ y\geq 0\}$ 在 $\sin z$ 下的像。

解.
$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) = -\frac{1}{2}(ie^{iz}-ie^{-iz}) \\ &= -\frac{1}{2}(ie^{iz}+\frac{1}{ie^{iz}}). \end{aligned}$$

进而依次考虑在 $iz, e^z, iz, -\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ 映射下的像。 $\square$

我们知道 $\sin z$ 并非单值函数，但我们可以选取定义域使其为单值的，上例就是下图的部分情况：

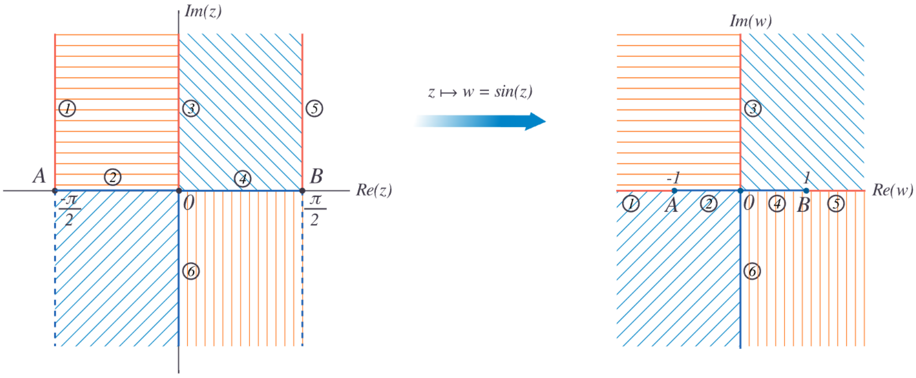


图 1: $\sin z$ 的像

Lec3 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 24 日

Part III

Cauchy 积分理论

1　复变函数的积分

定义 1.1. 设曲线 γ: $z = z(t)$, $(a \le t \le b)$ 为可求长曲线，f 定义在 γ 上。若 Riemann 和 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot(z(t_k) - z(t_{k-1}))$ 在 $|\pi| \to 0$ 时，有有限的极限且与分割 π 及 ζ_k 的选取无关，则称 f 在 γ 上**可积**，极限记为

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z.$$

若 $\lim\limits_{|\pi|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)|z(t_k) - z(t_{k-1})|$ 存在，记之为 $\int_\gamma f(z)|\,\mathrm{d}\,z|$。

设 f 在 γ 上连续，$f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, $z(t_k) = x_k + iy_k$，那么

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z(t_k) - z(t_{k-1}))\\
=&\sum_{k=1}^{n}(U(\xi_k,\eta_k) + iV(\xi_k,\eta_k))(\Delta x + i\Delta y)\\
=&\sum_{k=1}^{n}[(U\cdot\Delta x - V\cdot\Delta y) + i(V\cdot\Delta x + U\cdot\Delta y)]\\
\overset{|\pi|\to 0}{\to}&\int_\gamma(U\,\mathrm{d}\,x - V\,\mathrm{d}\,y) + i\int_\gamma(V\,\mathrm{d}\,x + U\,\mathrm{d}\,y).
\end{aligned}$$

命题 1.1. 设 $f = u + iv$ 在可求长曲线 γ 上连续，则

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_\gamma(u\,\mathrm{d}\,x - v\,\mathrm{d}\,y) + i\int_\gamma(v\,\mathrm{d}\,x + u\,\mathrm{d}\,y).$$

评论. $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$, $f(z)\mathrm{d}z = (u+iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i(v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)$。

若曲线是光滑的，则有

命题 1.2.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

证明.

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}\,t=\int_a^b (u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t)))\cdot(x'(t)+iy'(t))\,\mathrm{d}\,t\\=&\int_a^b[(u\cdot x'(t)-v\cdot y'(t))+i(v\cdot x'(t)+u\cdot y'(t))]\,\mathrm{d}\,t\\=&\int_\gamma(u\,\mathrm{d}\,x-v\,\mathrm{d}\,y)+i\int_\gamma(v\,\mathrm{d}\,x+u\,\mathrm{d}\,y)\\=&\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z.\end{aligned}$$

□

评论. $\int_\gamma f(z)|\,\mathrm{d}\,z|=\int_a^b f(z(t))\cdot|z'(t)|\,\mathrm{d}\,t$。特别取 $f(z)\equiv 1$ 时，$|\gamma|=\int_\gamma|\,\mathrm{d}\,z|=\int_\gamma|z'(t)|\,\mathrm{d}\,t$。

例 1.1. 计算

$$I=\int_{|z-a|=r}\frac{\mathrm{d}\,z}{(z-a)^n},\ n\in\mathbb{Z}.$$

定向为逆时针。

解. 设 $z=a+re^{i\theta}$, $(0\leq\theta<2\pi)$, $\mathrm{d}z=re^{i\theta}\cdot i\mathrm{d}\theta$，那么

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}\cdot i\,\mathrm{d}\,\theta}{r^n e^{in\theta}}=\int_0^{2\pi}r^{1-n}e^{i(1-n)\theta}i\,\mathrm{d}\,\theta\\&=r^{1-n}i\int_0^{2\pi}(\cos(1-n)\theta+i\sin(1-n)\theta)\,\mathrm{d}\,\theta=\begin{cases}0, & n\neq 1,\\ 2\pi i, & n=1.\end{cases}\end{aligned}$$

□

命题 1.3. 设 $D\subset\mathbb{C}$ 为区域，$f\colon D\to\mathbb{C}$ 连续且有原函数 $F(z)$(即 $F'(z)=f(z)$)，则对 D 中的任意光滑曲线 $\gamma\colon z=z(t)$ $(a\leq t\leq b)$，有

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=F(z(b))-F(z(a))=F(z(t))|_a^b$$

证明.

$$\begin{aligned}&\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}\,t\\=&\int_a^b(F(z(t)))'\,\mathrm{d}\,t=F(z(t))|_a^b.\end{aligned}$$

□

例 1.2.
$$\begin{aligned}
&\int_\gamma 1\,\mathrm{d}\,z = z(t)|_a^b = z(b)-z(a),\\
&\int_\gamma z\,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{2}z^2(t)|_a^b = \frac{1}{2}(b^2-a^2),\\
&\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z = 2\pi i.
\end{aligned}$$

于是我们获知 $f(z)=\frac{1}{z}$ 在 $|z|=1$ 的邻域中无原函数，因为积分一圈不为零。

定理 1.4. 设 f,g 在可求长曲线 γ 上连续，则

(1) $\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}\,z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z$，$\gamma^-$ 是与 γ 反向的曲线。

(2) $\int_\gamma(\alpha f(z)+\beta g(z))\,\mathrm{d}\,z = \alpha\int_\gamma f+\beta\int_\gamma g$。

(3) $\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z+\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z$。

(4) *(*)*$|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z| \le \int_\gamma |f(z)|\cdot|\,\mathrm{d}\,z|$*(绝对值不等式)*。

证明. (4)
$$\left|\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z(t_k)-z(t_{k-1}))\right| \le \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)|\cdot|z(t_k)-z(t_{k-1})|.$$
□

推论. 设 γ 的长度为 L，$M=\sup\limits_{z\in\gamma}|f(z)|$，则
$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le M\cdot L.$$
称为**长大不等式**。

例 1.3. 设 f 在 $\overline{D}\setminus\{a\}$ 上连续。证明：若 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=A$，则
$$\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\alpha A$$
这里 Γ_r 为逆时针张开 α 角且半径为 r 的圆弧。

证明. 设 $(z-a)f(z)=A+\varphi(z)$, $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)=0$，那么
$$\begin{aligned}
&f(z)=\frac{A}{z-a}+\frac{\varphi(z)}{z-a}\\
\Rightarrow &\int_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{\Gamma_r}\frac{A}{z-a}\,\mathrm{d}\,z+\int_{\Gamma_r}\frac{\varphi(z)}{z-a}\,\mathrm{d}\,z.
\end{aligned}$$
而 $\int_{\Gamma_r}\frac{A}{z-a}\,\mathrm{d}\,z = i\alpha A$，
$$\left|\int_{\Gamma_r}\frac{\varphi(z)}{z-a}\,\mathrm{d}\,z\right| \le \int_{\Gamma_r}\frac{|\varphi(z)|}{|z-a|}|\,\mathrm{d}\,z| \le \sup_{z\in\Gamma_r}|\varphi(z)|\cdot\frac{alphar}{r}\to 0\ (z\to a).$$
□

例 1.4. 平面闭曲线 γ 围成的图形的面积 $S=\frac{1}{2i}\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}\,z$。

证明.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}\,z &= \frac{1}{2i}\int_\gamma (x-iy)(\mathrm{d}\,x+i\,\mathrm{d}\,y)\\ &=\frac{1}{2i}\left[\int_\gamma (x\,\mathrm{d}\,x+y\,\mathrm{d}\,y)+i\int_\gamma(-y\,\mathrm{d}\,x+x\,\mathrm{d}\,y)\right]\\ &\overset{\text{Green}}{=}\frac{1}{2i}i\iint_S 2\,\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y=S.\end{aligned}$$

□

评论. $\mathrm{d}\overline{z}\wedge\mathrm{d}z=(\mathrm{d}x-i\mathrm{d}y)\wedge(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)=2i\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$。

2 Cauchy 积分定理

定理 2.1. *(Goursat)*：设 D 为区域，$f\colon D\to\mathbb{C}$ 全纯，若 γ 为 D 中的三角形的边界，且 γ 的内部包含在 D 中，则 $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$。

证明. 设 $\gamma^{(0)}=\gamma$，我们作出三角形的三条中线，将三角形划分成四个更小的三角形，取逆时针，记为 $\gamma_i^{(1)}$，$1\le i\le 4$。那么

$$\left|\int_{\gamma^{(0)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|=\left|\sum_{i=1}^4\int_{\gamma_i^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|\le 4\max_{1\le i\le 4}\left|\int_{\gamma_i^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|.$$

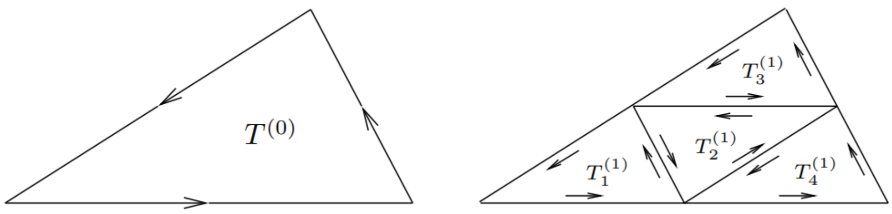


图 1: 三角形的二分

故存在某个 $\gamma_i^{(1)}$ 使得 $|\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}\,z|\le 4|\int_{\gamma_i^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z|$。记 $\gamma_i^{(1)}$ 为 $\gamma^{(1)}$，依次选取 $\gamma^{(2)},\gamma^{(3)},\cdots$，满足

$$\left|\int_{\gamma^{(j)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|\le 4\left|\int_{\gamma^{(j+1)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|.$$

用 Δ_n 表示 $\gamma^{(n)}$ 所围的闭三角形，那么

(1) $\Delta_0\supset\Delta_1\supset\Delta_2\supset\cdots$；

(2) $\mathrm{diam}\Delta_n\to 0$；

(3) $|\gamma^{(n)}|=\frac{L}{2^n}$，$L=|r^{(0)}|$；

(4) $|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z|\le 4^n|\int_{\gamma^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z|$。

由闭集套定理，存在唯一的 $z_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n \in D$，故 f 在 z_0 处可微，于是

$$
\begin{aligned}
& f(z)-f(z_0)=f'(z_0)\cdot(z-z_0)+\varphi(z)\cdot(z-z_0)\ \left(\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=0\right) \\
\Rightarrow & \left|\int_{\gamma^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| = \left|\int_{\gamma^{(n)}} f(z_0)\,\mathrm{d}\,z+\int_{\gamma^{(n)}} f'(z)(z-z_0)\,\mathrm{d}\,z+\int_{\gamma^{(n)}} \varphi(z)(z-z_0)\,\mathrm{d}\,z\right| \\
& \qquad\qquad\qquad \le \int_{\gamma^{(n)}} |\varphi(z)||z-z_0||\,\mathrm{d}\,z| \le \sup_{z\in\gamma^{(n)}} |\varphi(z)||\gamma^{(n)}|\cdot|\gamma^{(n)}| = \frac{L^2}{4^n}\sup_{z\in\gamma^{(n)}}|\varphi(z)| \\
\Rightarrow & \left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le \sup_{z\in\gamma^{(n)}}|\varphi(z)|\cdot L^2 \to 0\ (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

□

Lec7 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 28 日

定理 2.2. 设 $f\colon D\to\mathbb{C}$ 全纯，γ 是 D 中的可求长简单闭曲线，γ 的内部包含在 D 中，则 $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$。

证明. 由定理 2.1 知，当 γ 为多边形时结论成立，故只需证：

引理：对 $\forall\,\varepsilon>0$，存在 D 中的多边形 P $s.t.$

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_P f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|<\varepsilon.$$

引理证明：γ 为紧集且 $\gamma\cap\partial D=\varnothing$，故 $\rho=d(\gamma,\partial D)>0$。构造有界开集 G，$\gamma\subset G\subset\overline{G}\subset D$，$f$ 在 $\overline{G}$ 上连续，故对 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$，当 $z_1,z_2\in\overline{G}$，且 $|z_1-z_2|<\delta$ 时，则 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon/2L$, $(L=|\gamma|)$。

记 $\rho'=d(\gamma,\partial G)>0$，取 $\eta=\min(\rho',\delta)$，在 γ 上依次取点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ $s.t.$ $|\widehat{z_{k-1}z_k}|<\eta$，连接 z_{k-1},z_k，得到多边形 P，包含在 G 中。记 $\gamma_k=\widehat{z_{k-1}z_k}$, $P_k=\overline{z_{k-1}z_k}$，则

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_{P_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| &\le \left|\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_{\gamma_k} f(z_{k-1})\,\mathrm{d}\,z\right|+\left|\int_{P_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_{P_k} f(z_{k-1})\,\mathrm{d}\,z\right|\\ &\le \int_{\gamma_k}|f(z)-f(z_{k-1})||\,\mathrm{d}\,z|+\int_{P_k}|f(z)-f(z_{k-1})||\,\mathrm{d}\,z|\\ &\le \frac{\varepsilon}{2L}\cdot|\gamma_k|+\frac{\varepsilon}{2L}|P_k|<\frac{\varepsilon}{L}\cdot|\gamma_k|.\end{aligned}$$

从而

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_P f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|\le\sum_{k=1}^n\frac{\varepsilon}{L}\cdot|\gamma_k|=\varepsilon.$$

□

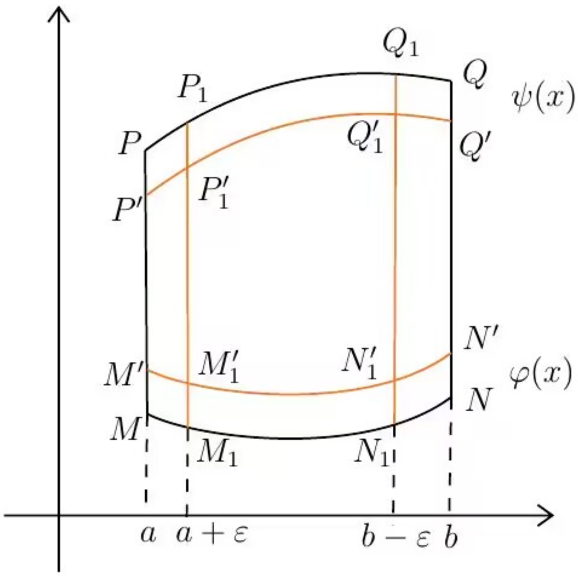
例 2.1. 注意 γ 的内部必须包含在 D 中。例如 $f(z)=\frac{1}{z}$, $z\in D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$，我们熟知其绕 0 积分不为零，而 0 也不在 D 的内部。

定理 2.3. 设 D 是可求长简单闭曲线 γ 的内部。若 $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$($f$ 在 D 中全纯且连续到边界)，则 $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$。

证明. 先证明当 D 具有如下形状时定理成立：$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$，$\varphi,\psi$ 连续。

设图形边界的顶点从左下角以逆时针顺序依次为 M,N,Q,P，设 $M'N'$ 为 $y=\varphi(x)+\eta$，$P'Q'$ 为 $y=\psi(x)-\eta$，并考虑 $M_1'P_1'$, M_1P_1 为 $x=a+\varepsilon$，$N_1'Q_1'$, N_1Q_1 为 $x=b-\varepsilon$，

且 $M_1'P_1'$, $N_1'Q_1'$ 介于 $M'N'$, $P'Q'$ 之间，M_1P_1, N_1Q_1 介于 MN, PQ 之间。$\varepsilon, \eta > 0$ 很小。



由定理 2.2，$\int_{M_1'N_1'Q_1'P_1'M_1'} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$。

固定 $\varepsilon > 0$，当 $\eta \to 0$ 时，

$$\int_{M_1'N_1'} f(z)\,\mathrm{d}\,z \to \int_{M_1N_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z, \int_{P_1'Q_1'} f(z)\,\mathrm{d}\,z \to \int_{P_1Q_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z.$$

这是因为 f 在 $\overline{D}$ 上连续。

$$\int_{P_1'M_1'} f(z)\,\mathrm{d}\,z \to \int_{P_1M_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z, \int_{Q_1'N_1'} f(z)\,\mathrm{d}\,z \to \int_{Q_1N_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z.$$

这是因为 f 有界且 $|P_1P_1'| \to 0$。

故 $\int_{M_1N_1Q_1P_1M_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$。

由于 $\varepsilon \to 0$ 时，$\int_{M_1N_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z \to \int_{MN} f(z)\,\mathrm{d}\,z$, $\int_{Q_1P_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z \to \int_{QP} f(z)\,\mathrm{d}\,z$。要证 $\int_{P_1M_1} f \to \int_{PM} f$, $\int_{N_1Q_1} f \to \int_{NQ} f$。记

$$y_\varepsilon := \max\{\varphi(b), \varphi(b-\varepsilon)\},$$
$$Y_\varepsilon := \min\{\psi(b), \psi(b-\varepsilon)\}.$$

由 NQ: $z(y) = b + iy$, $\varphi(b) \le y \le \psi(b)$，则

$$\int_{NQ} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b+iy)\,\mathrm{d}\,y = i\left(\int_{\varphi(b)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b)}\right) f(b+iy)\,\mathrm{d}\,y,$$

$$\int_{N_1Q_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{\psi(b-\varepsilon)} f(b-\varepsilon+iy)\,\mathrm{d}\,y = i\left(\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b-\varepsilon)}\right) f(b-\varepsilon+iy)\,\mathrm{d}\,y,$$

$$\left|\int_{NQ} f(z)\,\mathrm{d}\,z - \int_{N_1Q_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| = i\int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} (f(b+iy) - f(b-\varepsilon+iy))\,\mathrm{d}\,y + \text{四项积分}.$$

这里两项均趋于 0，前者因为被积函数趋于 0，且积分区间有界；后者因为积分区间长

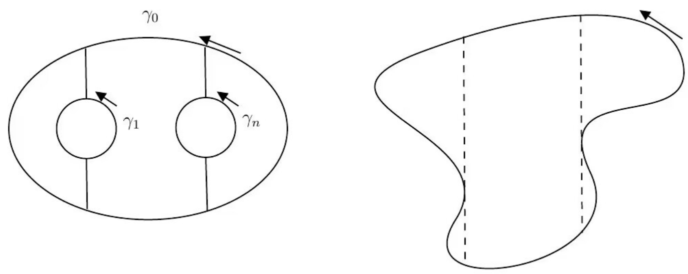
度趋于零，被积函数有界。 □

评论. 事实上一般用不到这么一般的定理。

甚至可以再一般一点：

定理 2.4. 如图所示，如果区域 D 的边界由简单可求长闭曲线 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 组成，$f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，记 $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \cdots \cup \gamma_n^-$，则 $\int_\gamma f = 0$，即

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z.$$



例 2.2. 设 γ 为可求长简单闭曲线，$a \notin \gamma$，求 $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\,z}{z-a}$。

解. (1) 若 a 在 γ 的外部，则 $\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}\,z$。

(2) 若 a 在 γ 的内部，则以 a 为圆心取逆时针圆周 γ_ε，由定理 2.4，

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}\,z}{z-a} = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\,z}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon e^{i\theta} \cdot i\,\mathrm{d}\,\theta}{\varepsilon \cdot e^{i\theta}} = 2\pi i,\ \gamma(\theta) = a + \varepsilon e^{i\theta}.$$

□

评论. 从这个例子可以看出定理 2.4 可以帮助我们修正曲线形状以利于计算 (同学注)。

例 2.3. $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{|\,\mathrm{d}\,z|}{|z-a|^2}$, $(|a| \neq r)$。

解. $z(\theta) = re^{i\theta}$, $\mathrm{d}z = re^{i\theta} \cdot i\mathrm{d}\theta$, $|\mathrm{d}z| = r\mathrm{d}\theta = \frac{r}{iz}\mathrm{d}z$。从而

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|z|=r} \frac{1}{|z-a|^2} \frac{r}{iz}\,\mathrm{d}\,z = \int_{|z|=r} \frac{-ir\,\mathrm{d}\,z}{(z-a)(\overline{z}-\overline{a})z} \\
&= \int_{|z|=r} \frac{-ir}{(z-a)(r^2-\overline{a}z)}\,\mathrm{d}\,z \\
&= \int_{|z|=r} \frac{(-i)\cdot r\,\mathrm{d}\,z}{(z-a)(r^2-|a|^2)} + \int_{|z|=r} \frac{(-i)\cdot \overline{a}r\,\mathrm{d}\,z}{(r^2-\overline{a}z)(r^2-|a|^2)} \\
&= \frac{2\pi r}{|r^2-|a|^2|}.
\end{aligned}$$

无论 $|a| < r$ 还是 $|a| > r$。 □

例 2.4. $f \in C^1(D)$，则 f 在 D 上全纯 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall\, a \in D$ 有

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0.$$

证明. $\Rightarrow$：$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z \overset{Green}{=} \iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\,\overline{z} \wedge \mathrm{d}\,z$，或 Cauchy 积分定理。

$\Leftarrow$：设 $f(z) = u + iv$，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|=r} (u+iv)(\mathrm{d}\,x + i\,\mathrm{d}\,y) \\
=&\frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a|=r} (u\,\mathrm{d}\,x - v\,\mathrm{d}\,y) + i(v\,\mathrm{d}\,x + u\,\mathrm{d}\,y) \\
=&\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-a|\le r} [(-u_y - v_x) + i(-v_y + u_x)]\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \\
\to&(-u_y - v_x) + i(u_x - v_y)|_{z=a}\ (r \to 0)
\end{aligned}$$

于是 f 满足 C-R 方程，从而全纯。 □

Lec8 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 30 日

3 全纯函数的原函数

我们熟知，对于 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，则 f 有原函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$。

那么，是否类似地对 $f\colon D\to\mathbb{C}$ 全纯，f 也有原函数呢？

很遗憾，并非如此。

例如，$f(z)=\frac{1}{z}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$f(z)$ 是原函数。这是因为如果 $f(z)$ 由原函数，则 $\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z=0$，但 $\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z=2\pi i$，矛盾。

定理 3.1. 设 $f\colon D\to\mathbb{C}$ 连续，如果对 D 中任何可求长简单闭曲线 γ，$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$，则 $F(z)=\int_{z_0}^z f(z)\,\mathrm{d}\,z$ 是 $f(z)$ 的一个原函数。

证明. 由条件知 $F(z)$ 是良定义的。

任取 $a\in D$，对 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, $B(a,\delta)\subset D$，且当 $|z-a|<\delta$ 时，$|f(z)-f(a)|<\varepsilon$。于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a}-f(a)\right|&=\frac{1}{|z-a|}\left|\int_{\gamma_z}f(z)\,\mathrm{d}\,z-\int_{\gamma_z}f(a)\,\mathrm{d}\,z\right|\\&\le\frac{1}{|z-a|}\int_{\gamma_z}|f(z)-f(a)||\,\mathrm{d}\,z|\le\frac{1}{|z-a|}\varepsilon\cdot|z-a|=\varepsilon\end{aligned}$$

从而 $F'(a)=f(a)$。 □

推论. 若 D 为单连通区域，$f\colon D\to\mathbb{C}$ 全纯，则 f 有原函数。

证明. 对 D 中的任意可求长简单闭曲线 γ，由单连通性，γ 的内部包含在 D 中，由 Cauchy 积分定理，$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$。 □

定理 3.2. 设 D 为单连通区域且 $0\notin D$，则存在 D 上的全纯函数 $F(z)$，满足 $e^{F(z)}=z$，即 $\mathrm{Log}z$ 在 D 中有单值分支。

证明. 固定 $z_0 \in D$，令 $F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z + C_0$, $(e^{C_0} = z_0)$。由于 D 单连通，$F(z)$ 良定义。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(ze^{-F(z)}\right) = e^{-F(z)} + ze^{-F(z)}(-F'(z)) = 0,\ \forall\, z,\\
\Rightarrow & ze^{-F(z)} = \text{const.} = z_0 e^{-F(z_0)} = z_0 e^{-C_0} = 1\\
\Rightarrow & e^{F(z)} = z.
\end{aligned}
$$

□

该定理可进一步推广。

定理 3.3. 设 f 为单连通区域 D 上的全纯函数且 $f(z) \neq 0, \forall\, z \in D$，则存在 D 上的全纯函数 $F(z)$ 满足 $e^{F(z)} = f(z)$，即 $\mathrm{Log} f(z)$ 在 D 中有单值分支。

评论. 若 D 非单连通，则 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}\,z$ 可能是多值函数。

例 3.1. $f(z) = \frac{1}{z}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$，取 $z_0 = 1$。

按第一种路径，有

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z\\
&= \int_1^{|z|} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x + \int_0^{\arg z} \frac{re^{i\theta}\cdot i\,\mathrm{d}\,\theta}{re^{i\theta}},\ |z| = r\\
&= \log|z| + i\arg z.
\end{aligned}
$$

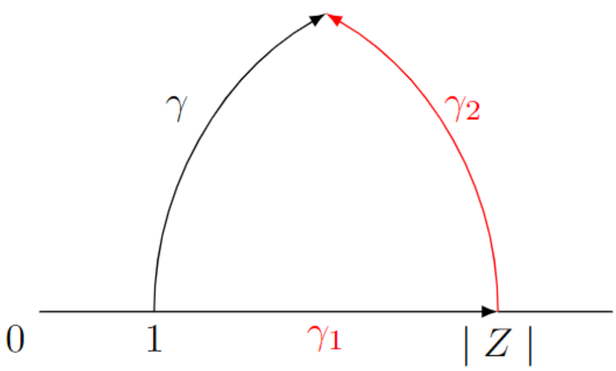


图 1: 第一种路径

按第二种路径，有

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z &= 2\pi i + \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}\,z\\
&= \log|z| + i\arg z + 2\pi i.
\end{aligned}
$$

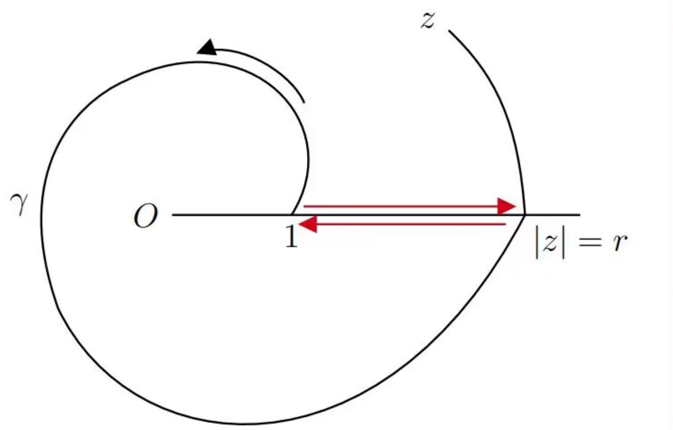


图 2: 第二种路径

4 Cauchy 积分公式

定理 4.1. 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的区域，如果 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，则对任意 $z \in D$, $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta$。

证明. 设 $z \in D$，对 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0\; s.t.\; B(z,\delta) \subset D$，当 $|\zeta - z| \leq \delta$ 时 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$。于是

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - f(z)\right| \\
=&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,z - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta\right| \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\delta} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|}|\,\mathrm{d}\,\zeta| \leq \frac{1}{2\pi}\varepsilon\frac{1}{\delta}2\pi\delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

定理 4.2. 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的区域，$f \in H(D) \cap C(\overline{D})$，则 f 在 D 中有任意阶导数，对 $\forall\, z \in D$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta,\ (n \geq 0).$$

证明. $n = 0$ 即定理 4.1。假设结论对 $n - 1$ 成立。

$\forall\, z \in D$, $\forall\, h \in \mathbb{C}\; s.t.\; z + h \in D$，则

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{h}\left(\frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n}\right)\mathrm{d}\,\zeta.$$

再利用 $a^n - b^n = (a-b)\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-1-j}$,

$$\begin{aligned}
&=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(\zeta - z - h)^j(\zeta - z)^{n-1-j}}\,\mathrm{d}\,\zeta \\
&\overset{h\to 0}{\to}\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta.
\end{aligned}$$

$\square$

评论. 若 D 是由若干条简单闭曲线围成的区域，结论也成立。

推论. 若 f 在区域 D 上全纯，则 f 在 D 上有任意阶导数。特别地，全纯函数的导函数也是全纯的。

证明. $\forall\, z \in D,\ \exists\, \delta > 0,\ B(z,\delta) \subset D$，对 $\gamma = \partial B(z,\delta)$，由定理 4.2 即可。 $\square$

例 4.1. 计算 $I = \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}\, z}{z^2(z^2+16)}$。

解. 分两种方法计算：

(1) $I = \frac{1}{16} \int_{|z|=2} (\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+16}) \,\mathrm{d}\, z = 0$。

(2) $I = \int_{|z|=2} \frac{\frac{1}{z^2+16}}{(z-0)^2} \,\mathrm{d}\, z = 2\pi i \left(\frac{1}{z^2+16}\right)'\Big|_{z=0} = 0$。

$\square$

例 4.2. 计算 $I = \int_{|z|=2} \frac{1}{(z^3-1)(z+4)^2} \,\mathrm{d}\, z$。

解. 取 $R > 0$ 很大，那么

$$\int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}\, z}{(z^3-1)(z+4)^2} - I = \left(\frac{1}{z^3-1}\right)'\Big|_{z=-4} \cdot 2\pi i = -\frac{32}{1323}\pi i,$$
$$\int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}\, z}{(z^3-1)(z+4)^2} = \int_{|z|=R} O(\frac{1}{R^5}) |\,\mathrm{d}\, z| = O(\frac{1}{R^4}) = 0,\ R \to +\infty.$$

$\square$

Lec9 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 4 日

例 4.1. P103.4：设 f 在 $B(0,R)$ 中全纯，$0<r<R$，则

(1) $f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\,\theta$(平均值公式)。

(2) $f(0)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{|z|<r}f(z)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$。

证明. (1) $f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}\,z=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}re^{i\theta}\cdot i\,\mathrm{d}\,\theta$。

(2) $RHS=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}f(\rho e^{i\theta})\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta=\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi f(0)\rho\,\mathrm{d}\,\rho=f(0)$。

□

例 4.2. P103.5：设 u 为 $B(0,R)$ 中的调和函数，则对 $0<r<R$，

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\,\theta.$$

称为调和函数的平均值公式。

证明. 由于 $B(0,R)$ 单连通，存在 V 使得 $U+iV$ 全纯，故在 4(1) 中两边取实部即可。 □

5 Cauchy 积分公式的应用

定理 5.1. *Cauchy* 不等式：设 f 在 $B(a,R)$ 中全纯，且对任意 $z\in B(a,R)$, $|f(z)|\le M$，则

$$|f^{(n)}(a)|\le\frac{n!\cdot M}{R^n},\ n=1,2,\cdots.$$

证明. 取 $0<r<R$，f 在 $\overline{B(a,r)}$ 中全纯，从而

$$|f^{(n)}(a)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta\right|\le\frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r=\frac{n!M}{r^n}.$$

令 $r\to R$ 即可。 □

定理 5.2. *Liouville* 定理：有界的整函数[1]为常数。

证明. 设 $|f(z)|\le M$, $\forall\, z\in\mathbb{C}$，任取 $a\in\mathbb{C}$, $\forall\,R>0$，由定理 5.1，$|f'(a)|\le\frac{M}{R}$，令 $R\to+\infty$，则 $f'(a)=0$，从而 $f'(z)\equiv 0\Rightarrow f=$ 常数。 □

[1]即在 $\mathbb{C}$ 上全纯的函数。

定理 5.3. 代数学基本定理：任意非常数的复系数多项式

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \; (a_n \neq 0)$$

在 $\mathbb{C}$ 中有零点。

证明. 反证法。假设 $P(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$，则 $\frac{1}{p(z)}$ 全纯。于是

$$|P(z)| = |a_n z^n| \left| \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n} \right) \right| \to +\infty, \; (|z| \to +\infty)$$

从而存在 $R > 0$，当 $|z| > R$ 时 $|\frac{1}{P(z)}| \leq 1$，而 $\frac{1}{P(z)}$ 在 $\overline{B(0,R)}$ 中连续 $\Rightarrow \exists\, M > 0,\ s.t.\ |\frac{1}{P(z)}| \leq M, \forall z \in \overline{B(0,R)}$，所以 $\frac{1}{p(z)}$ 为有界的整函数，于是为常数，进而 $P(z)$ 为常数，矛盾。 □

定理 5.4. *Morera*：设 f 在区域 D 中连续，且沿着 D 中任意可求长简单闭曲线的积分为零，则 f 在 D 中全纯。

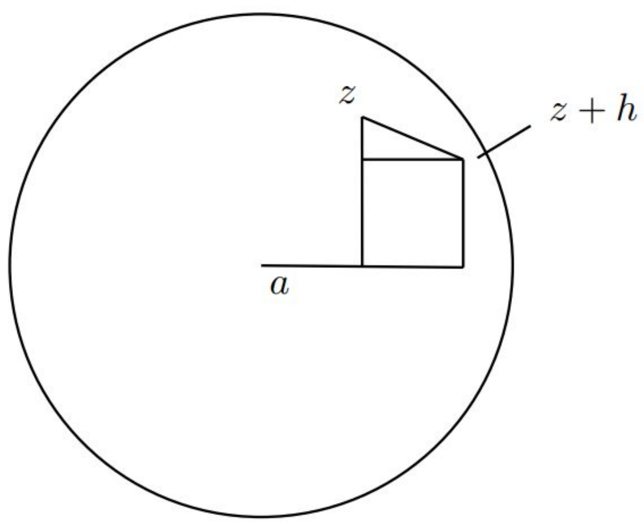
证明. 由条件知，变上限积分 $F(z) = \int_a^z f(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta$ 有定义，且 $F(z)$ 全纯，$F'(z) = f(z) \Rightarrow f(z)$ 全纯。 □

评论. 将条件减弱为“沿 D 中任意三角形边界积分为零”，结论仍成立。

任取 $a \in D$，取 $\delta > 0\ s.t.\ \overline{B(a,\delta)} \subset D$，对 $\forall z \in B(a,\delta)$，定义

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta,$$

其中 γ_z 为从 a 出发，先水平，再竖直的到 z 的唯一道路。



下证 $F'(z) = f(z)$。

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_\Gamma f(\zeta)\, \zeta$$

(Γ 为连接 z 和 $z+h$ 的线段)，

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_\Gamma (f(\zeta) - f(z))\, \mathrm{d}\,\zeta \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_\Gamma |f(\zeta) - f(z)| |\, \mathrm{d}\,\zeta|.$$

6 非齐次的 Cauchy 积分公式

设 $f=u+iv,\ u,v\in C^1(D)$，f 可以看出 $z,\overline{z}$ 的函数，

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}\overline{z}=\mathrm{d}x-i\mathrm{d}y.$$

定义 $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z=0,\ \mathrm{d}\overline{z}\wedge\mathrm{d}\overline{z}=0,\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}=-\mathrm{d}\overline{z}\wedge\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}=-2i\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，以及

- 0 次微分形式：$\omega=f(z)$；
- 1 次微分形式：$\omega=f(z)\mathrm{d}z+g(z)\mathrm{d}\overline{z}$；
- 2 次微分形式：$\omega=f(z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}$。

则 d 为外微分算子：

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\mathrm{d}\overline{z},$$
$$\mathrm{d}(f(z)\mathrm{d}z+g(z)\mathrm{d}\overline{z})=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}z+\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}\overline{z}=\left(-\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}+\frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}.$$

定理 6.1. *Green* 公式：设区域 D 是由若干条可求长简单闭曲线围成的区域，$\omega=f(z)\mathrm{d}z+g(z)\mathrm{d}\overline{z}$ 是 D 上的一次微分形式，其中 $f,g\in C^1(D)$，则

$$\int_{\partial D}\omega=\int_D\mathrm{d}\,\omega.$$

定理 6.2. *Pompeiu* 公式：设 D 是由若干条可求长简单闭曲线围成的区域，$f\in C^1(\overline{D})$，则对 $\forall\, z\in D$，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\,\zeta+\frac{1}{2\pi i}\iint_D\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\,\zeta\wedge\mathrm{d}\,\overline{\zeta}.$$

证明. 设 $z\in D$，$\forall\,\varepsilon>0$，取 $\eta>0\ s.t.\ \overline{B(z,\eta)}\subset D$，当 $|\zeta-z|<\eta$ 时 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$。记 $B_\eta=B(z,\eta)$，令 $G_\eta=D\setminus\overline{B}_\eta$，$\omega=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\ (\zeta\in G_\eta)$，由 Green 公式，

$$\int_{\partial G_\eta}\omega=\iint_{G_\eta}\mathrm{d}\,\omega,\ \mathrm{d}\omega=\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\overline{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta.$$

从而

$$\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\zeta-\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\,\zeta=\iint_{G_\eta}\mathrm{d}\,\omega.$$

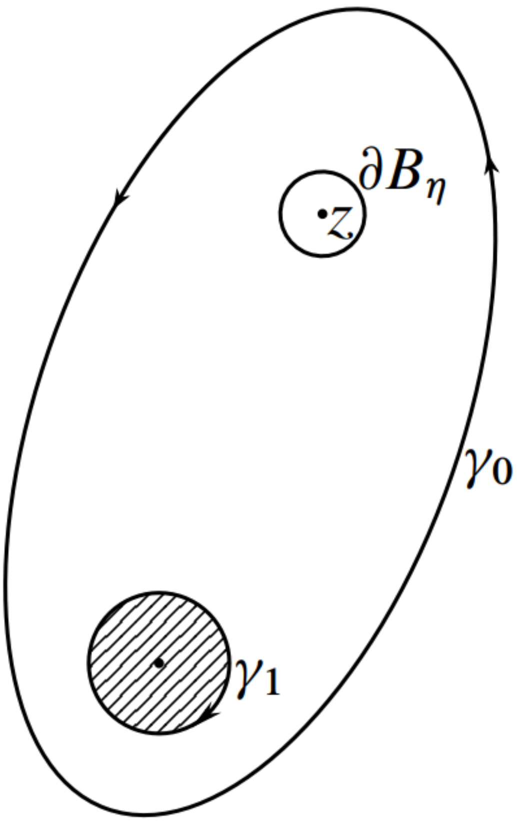
而这里 $\int_{\partial B_\eta}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\,\zeta=2\pi i\cdot f(z)$，且

$$\lim_{\eta\to0}\iint_{G_\eta}\mathrm{d}\,\omega=\lim_{\eta\to0}\left(\iint_D\mathrm{d}\,\omega-\iint_{B_\eta}\mathrm{d}\,\omega\right)=\iint_D\mathrm{d}\,\omega.$$

这是因为 $\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}$ 在 $\overline{B_\eta}$ 上连续 $\Rightarrow\exists\,M=M(z,\eta)>0,\ s.t.\ \left|\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\right|\leq M$，于是

$$\left|\iint_{B_\eta}\mathrm{d}\,\omega\right|=\left|\iint_{B_\eta}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\,\overline{\zeta}\wedge\mathrm{d}\,\zeta\right|$$
$$\iint_{B_\eta}M\cdot\frac{1}{|\zeta-z|}|2i|\cdot\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=2M\int_0^\eta r\,\mathrm{d}\,r\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\mathrm{d}\,\theta=4M\pi\eta\to0\ (\eta\to0).$$

□


∂B_η
z
γ_0
γ_1